高等学校教材

同调代数引论

佟文廷

高等教育出版社

内容提要

同调代数的思想方法主要来自代数拓扑学中复形的同调理论.它的研究对象主要是环模以及环模上的复形.本书的目的是介绍同调代数中最基础性的也是最精彩的内容.全书分四章:范畴与函子及其在模论中的应用;特殊模与相应的维数;环模复形的同调理论;谱序列.本书可供数学系的本科生、研究生作为学习本课程的教材,也可供希望了解或用到同调代数的高校教师与数学工作者参考.

目　　录

引　言

同调代数初成于本世纪 40 年代中期，是由著名数学家 S. Eilenberg 与 S. MacLane 等人的一系列重要工作奠基而成的一门学科. 它的思想方法主要来自代数拓扑学中复形的同调理论，它的研究对象主要是环模以及环模上的复形. 在发展的过程中，同调代数充分地使用了范畴论中的方法与理论(因此使同调代数的一些结果可应用于更广的对象)，并以 Hom、$\otimes$以及它们的导出函子 Ext、Tor 作为最基本的函子. 所以它能有效地给出环类的一些同调不变量(同调维数)，使同类的环(尤其是同构的环)具有相同的同调不变量，从而给环论的研究提供了一个有力的新工具. 最先引人注目的纯环论形式的 Krull 猜测——正则局部环为 UFD(唯一分解整环)——于 50 年代末以同调方法成功地得以解决，由此给出十分重要的一条定理(Auslander - Buchsbaum - Nagata 定理). 70 年代以后的一些有名的抽象代数书，如 N. Jacobson 的[Jac, 80]、S. Lang 的[L,84]、P. M. Cohn 的[Co,79]等，都设专章较全面地介绍同调代数的基本内容. 现在，同调代数作为一种有用的工具已被应用于群论、交换代数、代数几何、微分几何、代数拓扑、微分拓扑、数论、偏微分方程、非交换调和分析等学科，并越来越受到重视. 基于这些应用与同调代数理论本身的需要，通常总是约定所研究的环都有单位元且为结合环(对乘法满足结合律的环)，研究的模都是酉模(即环的单位元 1 与模的任意元 x 之积都仍为 x). 我们在本书中也遵从这些约定. 同时，在不指明左模或右模时都指左模.

本书的目的是介绍同调代数中最基础性的，也是最精彩的内

容,可供数学系的本科生、研究生作为学习本课程的教材.大体上说,作为同调代数最基础部分的前两章可作为数学系高年级本科生选修课教材,前三章则可作为非代数方向或非专攻同调代数的代数方向的硕士生与博士生的教材.作者于1993年秋曾用前三章为南开数学所与南开大学数学系八个方向的硕士生与博士生讲过此课,计用48学时,效果是很好的.第四章(谱序列)有一定的难度.作者根据十余年来在南京大学积下的讲稿尽量地将这一部分写得易于为读者接受,希望代数方向、拓扑方向以及对同调代数有兴趣的研究生能基本掌握这一章的内容.本书也可供希望了解同调代数的有关高校教师与数学工作者参考.由于本书的目的主要是介绍同调代数的基本理论与方法,尽管对环的同调理论已比国外大多数同调代数书介绍得更多,也吸收了不少近几年的新结果,但还有一些更进一步的内容没能详细写入.有兴趣的读者可参看周伯壎先生的专著[周,88].

本书的各节都力求系统性与完整性.比如第二章的三节,每节中都是完整地介绍一种重要的模类以及相应的同调维数,可视为是三个较完整的讲座.在用作教材时,较长的节可分两次讲授,对程度较高的学生也可一次讲完.根据我们过去的经验,这是有一定的优点的,尤其是便于读者查阅或复习.

本书各节后面都附有少量经我们精选的习题,大部分难度不大,但用到的方法却是最基本的.根据作者十余年的教学体会,认真地做这些习题对读者是很有益处的.做完这些习题仍有余力的读者还可在书末列出的参考书中再选做一些.

本书是在丁石孙教授、刘绍学教授以及国家教育委员会首届高等学校数学与力学教学指导委员会代数与数论教材建设组诸先生的鼓励下完成的.在书写过程中经常受到业师周伯壎教授的教诲与帮助,在此表示衷心的感谢.

佟文廷

1996年6月23日于南京大学

第一章　范畴与函子及其在模论中的应用

在本章中，我们将介绍范畴论中最基本的一些概念与基本结果．为了不使新概念过分集中，有关范畴与函子的其他内容将穿插到本书后面各有关章节中，边介绍边应用．本章中的重点是：范畴与函子的定义及基本结果、正合列与图追踪法、Hom 与$\otimes$函子．尤其是正合列与图追踪法，这是同调代数最基本的技巧，读者宜熟习之．

§1　范　　畴

数学的各分支都是研究一些对象类以及对象间的联系与分类．范畴的概念与理论给出了这方面最好的概括．

最早为范畴论奠基的是 1945 年 S. Eilenberg 与 S. MacLane 的论文[EM,45]（自然等价性的一般理论）．1971 年 S. MacLane 又写出一本适用于各个方向数学家的范畴论专著[M,71]．目前，范畴论在计算机科学中得到了成功的应用，国内外不少大学的计算机系已开设了范畴方面的课程．

本节中为避免新概念过多的集中，只介绍最基本的概念与理论，其他的一些重要概念将分散到用到它们的章节．

先介绍范畴的定义．一般的读者将它联系到线性代数中线性空间的理论，就不会觉得太抽象了．

定义 1　称 $\mathscr{C}$ 是一个范畴（category）是指 $\mathscr{C}$ 有如下的三个组成部分 1,2,3，并满足下面的三条公理 C_1, C_2, C_3：

1．$\mathscr{C}$ 有由**对象**（object）$A, B, C, \cdots$ 组成的类 $\mathrm{Ob}\mathscr{C}$，称为 $\mathscr{C}$ 的对

象类；

2. 对 $\mathscr{C}$ 的任两个对象 A,B，都对应一个集合 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$（常简记为 $\mathrm{Hom}(A,B)$ 或 $\mathscr{C}(A,B)$，$\mathrm{Mor}(A,B)$），其元素称为（由 A 到 B 的）**态射**(morphism)或箭头(arrow)；

3. 有态射的合成法则：对任意的对象 A,B,C 与 $\sigma\in\mathrm{Hom}(A,B)$ 以及 $\tau\in\mathrm{Hom}(B,C)$，有唯一的 $\varphi\in\mathrm{Hom}(A,C)$，记为 $\varphi=\tau\sigma$，称为 σ 与 τ 的合成；

C_1 不相交性：除非 $A=C$ 且 $B=D$，$\mathrm{Hom}(A,B)\cap\mathrm{Hom}(C,D)=\varnothing$；

C_2 结合性：对任意的对象 A,B,C,D 与任意的 $\sigma\in\mathrm{Hom}(A,B)$，$\tau\in\mathrm{Hom}(B,C)$，$\psi\in\mathrm{Hom}(C,D)$，

$$\psi(\tau\sigma)=(\psi\tau)\sigma;$$

C_3 恒等态射的存在性：对任意的对象 A，必有 $I_A\in\mathrm{Hom}(A,A)$ 使对任意的对象 B,C 及 $\sigma\in\mathrm{Hom}(A,B)$，$\tau\in\mathrm{Hom}(C,A)$，必有

$$\sigma I_A=\sigma$$

$$I_A\tau=\tau$$

若 $\mathscr{C},\mathscr{D}$ 为两个范畴，满足 $\mathrm{Ob}\mathscr{D}\subseteq\mathrm{Ob}\mathscr{C}$ 且对任意的 $A,B\in\mathrm{Ob}\mathscr{D}$，

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(A,B)\subseteq\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$$

则称 $\mathscr{D}$ 为 $\mathscr{C}$ 的**子范畴**(subcategory)．若又有

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(A,B)=\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$$

则 $\mathscr{D}$ 又称为 $\mathscr{C}$ 的全(**满**)**子范畴**(full subcategory)．

为了说明这个基本定义，我们提出几点“注”．

注 1 今后我们以“$\forall A\in\mathrm{Ob}\mathscr{C}$”或“$\forall A\in\mathscr{C}$”表示“$A$ 为范畴 $\mathscr{C}$ 的任意对象”．从定义 1 中可看出：$\forall A\in\mathscr{C}$，$I_A\ \exists\,|$（“$\exists\,|$”表“存在唯一”，如只用“$\exists$”则只表“存在”）．事实上，设 I'_A 也是对象 A 的恒等态射，则由 C_3 知

$$I'_A = I'_A I_A = I_A$$

注 2 容易看出,在范畴 $\mathscr{C}$ 中对象类 $\mathrm{Ob}\mathscr{C}$ 与 $\{I_A \mid A \in \mathrm{Ob}\mathscr{C}\}$ 是一一对应的. 因此,在范畴论中有时只研究态射及其合成而忽略对象. 于是范畴论又被称为“箭头理论”.

注 3 注意集合与类(class)的区别. 集合可看成是有基数的“小类”. 我们可以说“一切 Abel 群组成的类”,而不能说“一切 Abel 群组成的集合”. 否则,因一切 Abel 群之直和仍为 Abel 群,会导致矛盾.

当范畴 $\mathscr{C}$ 的对象类 $\mathrm{Ob}\mathscr{C}$ 为集合时,又称 $\mathscr{C}$ 为**小范畴**(small category).

注 4 即使对小范畴,态射也未必为映射,更未必为同态(但映射或同态都是适当范畴中的态射). 因此,定义单态射、满态射需用它法(见后). 我们来看一个例子.

例 1 令 S 为乘法幺半群(monoid),则 S 为一个集合. 定义范畴 $\mathscr{C}$ 使 $\mathrm{Ob}\mathscr{C} = \{*\}$, $\mathrm{Hom}(*, *) = S$,态射合成由 S 中的乘法给出(容易验证 $\mathscr{C}$ 满足范畴定义的一切要求). 由于 $*$ 仅是一个记号,它不是由元素组成的集合,因此 $\tau \in \mathrm{Hom}(*, *)$ 不是通常的映射,更不是同态.

尽管如此,在范畴论中对态射 $\sigma \in \mathrm{Hom}(A, B)$(也记为 $A \xrightarrow{\sigma} B$ 或 $\sigma: A \to B$),仍称 A 为 σ 的**定义域**(domain),称 B 为 σ 的**值域**(codomain).

注 5 在范畴 $\mathscr{C}$ 中, $\mathrm{Hom}(A, B)$ 可为空集.

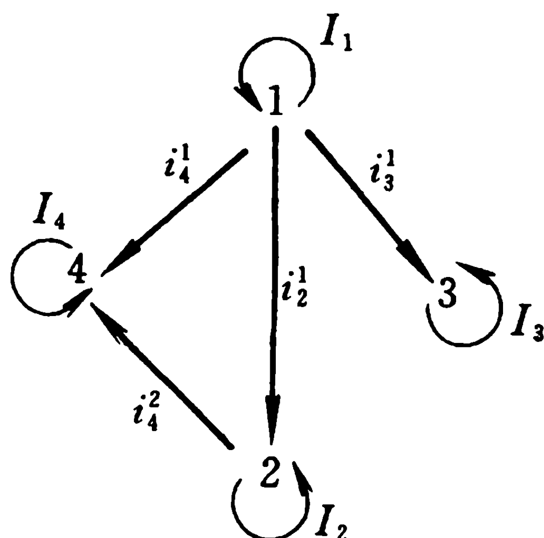
例 2 设 X 为一个偏序集(poset)(即有关系“$\leqslant$”使 (1) $x \leqslant x, \forall x \in X$; (2) $x \leqslant y, y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z, \forall x, y, z \in X$; (3) $x \leqslant y, y \leqslant x \Rightarrow x = y, \forall x, y \in X$. 比如取 X 为正整数集,用“$\leqslant$”表“整除”即可). 取 $\mathrm{Ob}\mathscr{C} = X$,定义

$$\mathrm{Hom}(x, y) = \begin{cases} \{i_y^x\}, \text{若 } x \leqslant y \\ \varnothing, \text{其他情况} \end{cases}$$

且

$$i_z^y i_y^x = i_z^x, \quad 当\ x \leqslant y \leqslant z\ 时.$$

对这个范畴 $\mathscr{C}$,若 $x \leqslant y$ 不成立,则 $\mathrm{Hom}(x,y) = \varnothing$. 比如取 $X = \{1,2,3,4\}$,"$\leqslant$"表整除,则相应的范畴 $\mathscr{C}$ 可用如下的有向图表出:



容易看出,$\mathrm{Hom}(j,1)$, $j=2,3,4$, $\mathrm{Hom}(2,3)$, $\mathrm{Hom}(3,2)$, $\mathrm{Hom}(3,4)$等都是空集. 当然,在一般的范畴 $\mathscr{C}$ 中,$\mathrm{Hom}(A,A)$为一个幺半群,其幺元素(单位元)为 I_A.

下面列出几个常见的范畴例子:

范畴	对象类	态射
$\mathbb{AG}$(Abel 群范畴)	全体 Abel 群	群同态
$\mathbb{G}$ (群范畴)	全体群	群同态
$\mathbb{R}$ing(环范畴)	全体环	环同态
$\mathbb{S}$ (集范畴)	全体集合	映射
$\mathbb{T}$op(拓扑空间范畴)	全体拓扑空间	连续映射
${}_R\mathfrak{M}$(环 R 上的左模范畴)	全体左 R－模	左 R－模同态
$\mathbb{LS}_F$(域 F 上线性空间范畴)	全体 F－线性空间	F－线性空间同态
$\mathbb{TG}$(拓扑群范畴)	全体拓扑群	连续群同态

注 6 不难看出$\mathbb{A}\mathrm{G}={}_{\mathbf{Z}}\mathfrak{M}$. 因此环模的理论是 Abel 群论的推广.(不熟悉环模的读者可先参见本章后面§3中的定义)

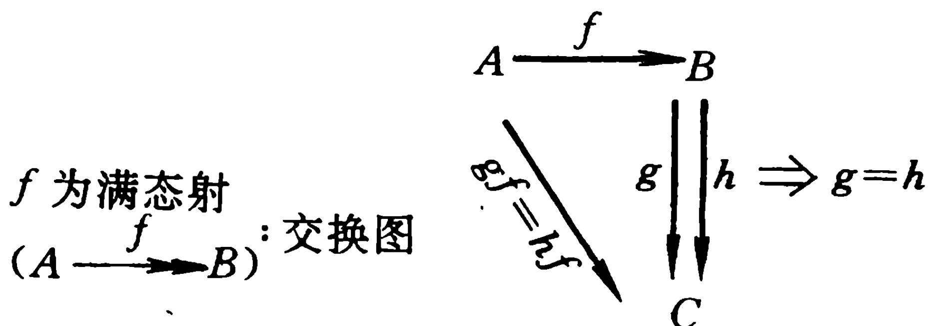
下面我们来定义同构态射、满态射与单态射.

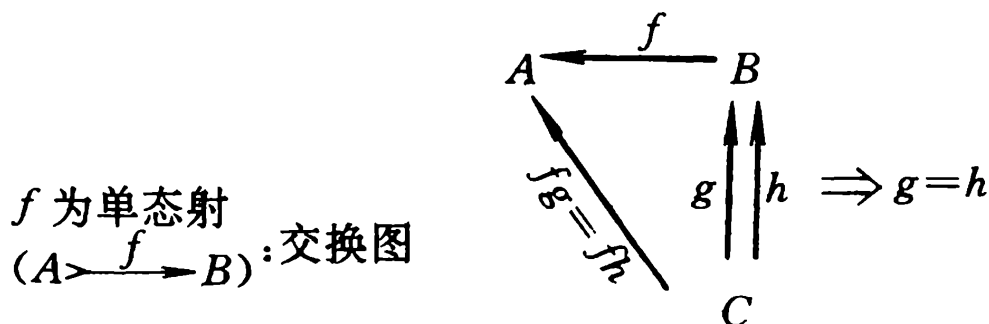
定义 2 设$\mathscr{C}$为一个范畴，$\sigma\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$，$\tau\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B,A)$使$\sigma\tau=I_B$且$\tau\sigma=I_A$，则称$\sigma,\tau$为**同构**(态射)，也称为**等价**(态射)或**可逆态射**，且称对象A,B为**同构的**(等价的)，σ,τ又互称为**逆态射**.

设$f\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$，若对使$gf=hf$的$g,h\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B,C)$都必有$g=h$(即$f$右可消)，则称$f$为**满态射**(epic morphism)，常记为$A\xrightarrow{f}\!\!\!\!\rightarrow B$.

设$f\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B,A)$，若对使$fg=fh$的$g,h\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C,B)$都必有$g=h$(即$f$左可消)，则称$f$为**单态射**(monic morphism)，常记为$B\rightarrowtail^{f} A$.

这两个定义可分别图示如下(注意二者的区别只在于"箭头改号"而已!):





这里顺便地明确一下交换图(可换图，交换图表)(commutative diagram)的含意. 在一个含对象与态射的箭头图中，若从图中

任一对象出发到另一对象有两条或更多的(由同向箭头接起来的)路径相通,则顺着这些路径(沿箭头方向)的态射合成都相等,这样的图就称为交换图.对比较复杂的图只需检查各网孔(如三角形、四边形网孔等)是否为交换图,即知该图是否交换.

本书中出现的图都指交换图.

现在我们来看看同构与满态射、单态射的关系如何.先来证明如下定理.

定理 1 在任意范畴中,同构(等价)必为满态射与单态射.

证 在一个范畴中,若 $\sigma: A\to B$ 为同构,则有 $\tau: B\to A$ 使 $\sigma\tau = I_B, \tau\sigma = I_A$.注意到对 $\forall h, g\in \mathrm{Hom}(B, C)$,若有 $h\sigma = g\sigma$,两端右合成于 τ 则得

$$h(\sigma\tau) = g(\sigma\tau)$$

即 $hI_B = gI_B$,故 $h = g$.于是 σ 为满同态.类似地,可证 σ 为单态射. □

注 7 定理 1 之逆不真.这由下例即知.

例 3 在$\mathbb{T}$op(拓扑空间范畴)中取 $X=\mathbb{R}$(带离散拓扑的实数集),$X'=\mathbb{R}$(带通常的绝对值给出的拓扑).令 $\sigma: x\longmapsto x'=x$,则 $\sigma: X\to X'$为连续映射(开集的原象仍为开集),因此 $\sigma\in \mathrm{Hom}(X, X')$,且为满、单态射.但 σ 不是$\mathbb{T}$op 中的同构.因为其逆态射不存在([0,1]在 X 中为开集,它对 σ 之逆映射的原象仍为[0,1],但[0,1]在 X'中不是开集).

由定理 1 与此例知,在一般范畴 $\mathscr{C}$ 中,

$$f \text{ 为同构(态射)} \rightleftarrows\!\!\!\!\!/\ \ f \text{ 为满、单态射}.$$

注 8 容易证明:在$\mathbb{S}$ 、$\mathbb{AG}$、$\mathbb{G}$ 、${}_R\mathfrak{M}$ 诸范畴中,

$$f \text{ 为单态射} \Leftrightarrow f \text{ 为单映射(同态)}$$

$$f \text{ 为满态射} \Leftrightarrow f \text{ 为满映射(同态)}$$

(对这些范畴,单、满映射(同态)的定义如常,即对 $f: A\to B$,若 $\forall x\neq y\in A, f(x)\neq f(y)$,则称 f 为单映射(同态).若 $\forall b\in B$ 都 $\exists a\in A$ 使 $f(a)=b$,则称 f 为满映射(同态)).

值得注意的是,在有些范畴中,并不完全如此. 比如在环范畴 $\mathbb{R}$ing 中,

$$f\text{ 为单态射}\Leftrightarrow f\text{ 为单同态}$$

$$f\text{ 为满态射}\underset{\not\Rightarrow}{\Leftarrow} f\text{ 为满同态}$$

为说明这里的"$\not\Rightarrow$",给出一个具体例子即可.

例 4　考察整数环$\mathbb{Z}$、有理数域(环)$\mathbb{Q}$与实数域(环)$\mathbb{R}$. 设 f: $\mathbb{Z}\rightarrowtail\mathbb{Q}$ 为嵌入映射. 显然 f 为环的(单)同态,但不是满同态. 由于对任意的环同态 $g,h:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ 分别由限制同态 $g|_{\mathbf{Z}}$,$h|_{\mathbf{Z}}$ 唯一确定. 由此,$gf=hf$ 时必有 $g=h$,即 f 为满态射. 这说明 f 为$\mathbb{R}$ing 的满态射但非(环的)满同态.

注意这个 f 是$\mathbb{R}$ing 的满、单态射,但不是环对象间的同构. 这又一次地说明定理 1 之逆不真.

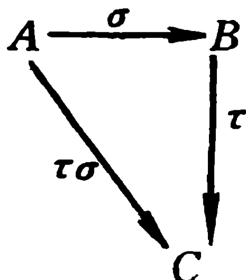
有了定义满、单态射的经验(主要是"箭头改号"),我们可以较容易地介绍反范畴与对偶原理.

定义 3　设 $\mathscr{C}$,$\mathscr{C}^\circ$为两个范畴,它们满足如下条件:

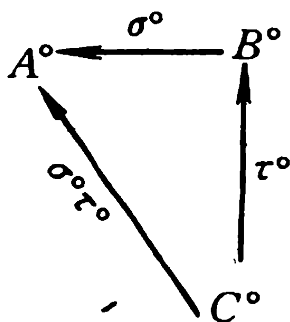
(i) $\mathrm{Ob}\mathscr{C}=\mathrm{Ob}\mathscr{C}^\circ$,当 $A,B,C,\cdots\in\mathrm{Ob}\mathscr{C}$ 作为 $\mathscr{C}^\circ$中的对象时,分别记为 $A^\circ,B^\circ,C^\circ,\cdots$;

(ii) $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)=\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^\circ}(B^\circ,A^\circ)$,$\mathscr{C}$ 中的 $A\xrightarrow{\sigma}B$ 即 $\mathscr{C}^\circ$中的 $A^\circ\xleftarrow{\sigma^\circ}B^\circ$(反转箭头);

(iii) $\mathscr{C}$ 中的交换图:



即 $\mathscr{C}^\circ$中的交换图:



即

$$\sigma^\circ\tau^\circ=(\tau\sigma)^\circ$$

则称 $\mathscr{C}^\circ$ 为 $\mathscr{C}$ 的**反范畴**(opposite category),也称 $\mathscr{C}^\circ$ 为 $\mathscr{C}$ 的**逆范畴**或**对偶范畴**(dual category).

容易看出:$(\mathscr{C}^\circ)^\circ=\mathscr{C}$ 且 $\mathscr{C}$ 中的交换图经“对象、态射加圈,反转箭头”后即得 $\mathscr{C}^\circ$ 中相应的交换图.

反范畴的重要性主要在于它提供了如下的**对偶原理**(duality principle):

设 S 为一句对 $\mathscr{C}$ 与 $\mathscr{C}^\circ$ 都有意义的陈述(说明概念,提出命题等),$S(\mathscr{C})$,$S(\mathscr{C}^\circ)$ 分别为 S 在 $\mathscr{C}$,$\mathscr{C}^\circ$ 中的具体体现. 将 $S(\mathscr{C}^\circ)$ 经“$\mathscr{C}^\circ$ 中对象与态射去掉圈‘◦’,$\mathscr{C}$ 中对象与态射加圈‘◦’,并反转箭头”后所得的陈述记为 $S^\circ(\mathscr{C})$. 我们称 $S^\circ(\mathscr{C})$ 为 $S(\mathscr{C})$ 的**对偶陈述**.

由此可产生对偶概念(如单态射与满态射为对偶概念)、对偶命题、对偶方法等. 常称此为对偶原理. 它主要有如下的两个作用:

(1) 若 $S(\mathscr{C})$ 与 $S(\mathscr{C}^\circ)$ 都是成立的定理,则 $S^\circ(\mathscr{C})$ 与 $S^\circ(\mathscr{C}^\circ)$ 也是成立的定理,无需再证. 常能“举一反二”.

事实上,由 $S(\mathscr{C}^\circ)$ 与 $S^\circ(\mathscr{C})$ 等价知 $S^\circ(\mathscr{C})$ 成立,由 $S(\mathscr{C})$ 与 $S^\circ(\mathscr{C}^\circ)$ 等价知 $S^\circ(\mathscr{C}^\circ)$ 成立(将 $\mathscr{C}^\circ$ 看作 $\mathscr{C}^{\circ\circ}$).

(2) 有了 $\mathscr{C}$ 中的定理 S 常可启发我们得出 $\mathscr{C}$ 中的定理 S°(比如检查 S 的证明,看看经对偶翻译后是否仍有效或另用它法去证. 在对偶翻译证明有效时,S° 的证明不必写出,指出“对偶地可证”即可). 同样地由一个概念可引出一个对偶概念.

以处理下述定义作例.

定义 4 设 $\mathscr{C}$ 为范畴. 若 $I\in \mathrm{Ob}\mathscr{C}$ 满足

$$|\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(I,A)|=1,\quad \forall A\in \mathrm{Ob}\mathscr{C}$$

则称 I 为 $\mathscr{C}$ 的一个**始对象**(initial object),这里 $|X|$ 表示集合 X 的元素数或基数.

令 $S(\mathscr{C})$ 为定义 4, $S(\mathscr{C}^{\circ})$ 为 $\mathscr{C}^{\circ}$ 中始对象的定义,即"若 $I^{\circ}\in \mathrm{Ob}\mathscr{C}^{\circ}$ 满足 $|\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^{\circ}}(I^{\circ},A^{\circ})|=1, \forall A^{\circ}\in \mathrm{Ob}\mathscr{C}^{\circ}$,则称 I° 为 $\mathscr{C}^{\circ}$ 的一个始对象". 注意到

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^{\circ}}(I^{\circ},A^{\circ})=\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,I)$$

经对偶翻译即得 $S^{\circ}(\mathscr{C})$,这就得到一个对偶定义. 今后对于对偶定义、对偶定理(命题)采用相同的编号,但其中之一的编号数码的右上角加"∘",以便于读者对照.

定义 4° 设 $\mathscr{C}$ 为范畴. 若 $I\in \mathrm{Ob}\mathscr{C}$ 满足

$$|\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,I)|=1,\quad \forall A\in \mathrm{Ob}\mathscr{C}$$

则称 I 为 $\mathscr{C}$ 的一个**终对象**(terminal object).

若 Z 同时为 $\mathscr{C}$ 中的始对象与终对象,则称 Z 为 $\mathscr{C}$ 的一个**零对象**(null object).

这样,我们就得到一对对偶概念(始对象与终对象)以及一个自对偶的概念(零对象).

再来看几个例子.

例 5

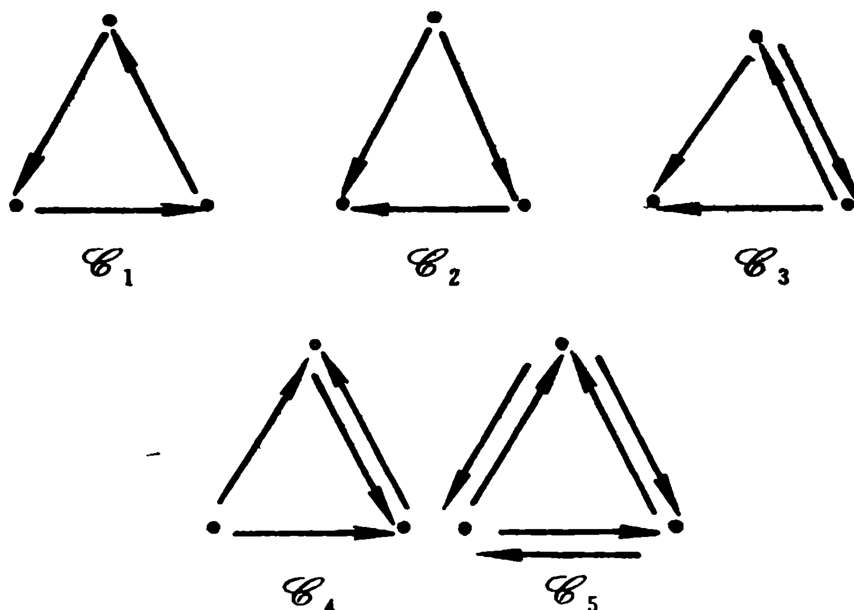
$\mathbb{S}$(集范畴)无始对象与零对象,有 1 个终对象(单元集);

$\mathbb{N}$(正整数集以"整除"作为"$\leqslant$",用例 2 的方法给出的范畴)有 1 个始对象,无 终对象,因此也无零对象;

$\mathbb{N}^{\circ}$有 1 个终对象,无始对象,因此也无零对象;

$\mathbb{G}$(群范畴)有 1 个始对象,1 个终对象与 1 个零对象,即单位元群.

对下图给出的范畴(点表对象,箭头表态射,箭头全体即态射全体,但省去各对象到自身的恒等态射):



$\mathscr{C}_1$ 无始对象、终对象,因此无零对象;

$\mathscr{C}_2$ 有 1个始对象,1个终对象,但无零对象;

$\mathscr{C}_3$ 有 2个始对象,1个终对象,但无零对象;

$\mathscr{C}_4=\mathscr{C}_3^{\circ}$ 有 2个终对象,1个始对象,但无零对象;

$\mathscr{C}_5$ 有 3个始对象,3个终对象,3个零对象,即,它的一切对象都是零对象.

由上面的例子(如 $\mathscr{C}_5$)可以看出:一个范畴中的始对象、终对象以及零对象都可能不是唯一的.因此,自然要问:这些不同的始对象(终对象,零对象)间有何关系? 为了研究这个问题.我们设 I',I''都是范畴 $\mathscr{C}$ 中的始对象.则由始对象定义知

$$|\mathrm{Hom}(I',I'')|=|\mathrm{Hom}(I'',I')|=|\mathrm{Hom}(I',I')|=|\mathrm{Hom}(I'',I'')|=1$$

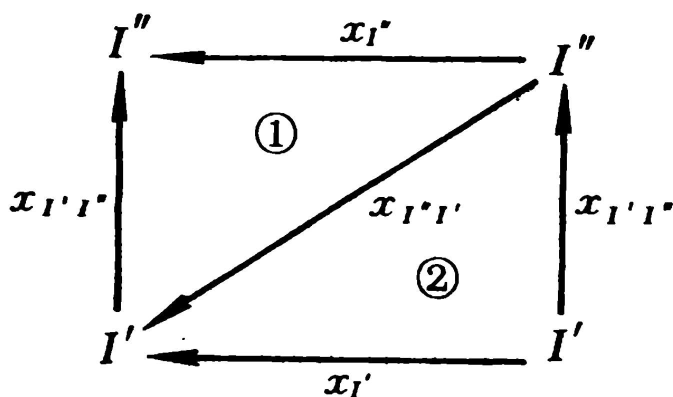
于是可令

$$\mathrm{Hom}(I',I'')=\{x_{I'I''}\},\ \mathrm{Hom}(I'',I')=\{x_{I''I'}\}$$

$$\mathrm{Hom}(I',I')=\{x_{I'}\},\mathrm{Hom}(I'',I'')=\{x_{I''}\}$$

由范畴的定义知,必有如下的交换图:

即



$$x_{I'I''}x_{I''I'} = x_{I''}\text{（由①交换）}$$

$$x_{I''I'}x_{I'I''} = x_{I'}\text{（由②交换）}$$

故可断言 I'，I''是同构的（注意 $x_{I'}$，$x_{I''}$都是恒等态射）. 对偶地（注意，上述证明对 $\mathscr{C}^{\circ}$也有效，但 $\mathscr{C}^{\circ}$的始对象即 $\mathscr{C}$ 的终对象）知，$\mathscr{C}$ 中的终对象如存在，也都是同构的，当然零对象（首先是始对象，也是终对象）也有这个性质. 于是我们证明了：

定理 2　任意范畴 $\mathscr{C}$ 中的始对象（终对象、零对象）如存在，在同构意义下必是唯一的.

比如在实线性空间范畴中有无穷多个零对象（比如[0,1]上的零函数组成的实线性空间，n 元零向量组成的实线性空间，$n=1$，2，3，…，都是实线性空间范畴中的零对象），它们都是同构的，通常可用同一个记号"O"来表示.

注 9　由上诸例可看出：

$S(\mathscr{C})$为成立的命题$\not\Rightarrow$ $S^{\circ}(\mathscr{C})$为成立的命题.

因为在 $S(\mathscr{C})$成立时，$S(\mathscr{C}^{\circ})$未必成立. 比如，"$\mathbb{S}$ 中存在终对象"成立，但"$\mathbb{S}^{\circ}$中存在终对象"并不成立. 因此"$\mathbb{S}$ 中存在始对象"不成立.

仿定理 2 的证明以及上例中的 $\mathscr{C}_5$ 构作，对任一个正整数 n，我们都可构作一个由 n 个对象 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 组成的范畴，使得这些对象都是此范畴的零对象（始对象、终对象）. 事实上，这只要将每一个态射集都取成单元集. 比如取

$$\mathrm{Hom}(A_i, A_i) = I_{A_i}$$
$$\mathrm{Hom}(A_i, A_j) = \{x_{ij}\}$$

即可.

有了零对象的概念后,我们很自然地希望建立零态射的概念.在零对象不唯一时,当然希望零态射概念的建立不受影响.为此让我们分析一下实线性空间 A,B 间零同态(零态射)的含意.事实上,A,B 间的零同态 0_{AB} 是两个同态的合成:

$$A \xrightarrow{0_{AO}} O \xrightarrow{0_{OB}} B,\text{即 } 0_{AB} = 0_{OB}0_{AO}$$

其中 O 为 B 中零元素组成的实线性空间,由于 0_{AO},0_{OB} 都是唯一确定的,0_{AB} 也是唯一确定的.

对于一般有零对象的范畴 $\mathscr{C}$,我们自然地可以照搬这个过程.即取 $\mathscr{C}$ 中的一个零对象 Z,对于对象 A,B,由于 $\mathrm{Hom}(Z,B)$ 与 $\mathrm{Hom}(A,Z)$ 都只有一个元素(分别记为 0_{ZB},0_{AZ}),它们的合成是唯一确定的,因此,取定 Z 后,

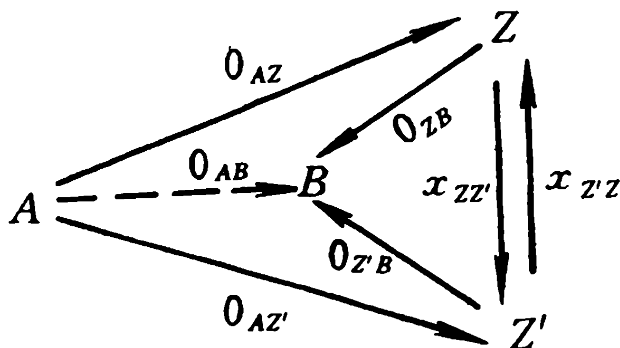
$$0_{AB} = 0_{ZB}0_{AZ}$$

是唯一确定的.但作为 $\mathrm{Hom}(A,B)$ 中零态射的定义还需推究一下:如换 Z 为另一个零对象 Z' 是否有

$$0_{ZB}0_{AZ} = 0_{Z'B}0_{AZ'}\,?$$

能证出这一点,才能保证这种定义是完全确定的.

事实上,下图中用实箭头表示的各态射都是相应态射集的唯一元素.因此下图一定是交换图.



用此图的交换性与态射合成的结合性,并注意

$$x_{ZZ'}x_{Z'Z}=I_{Z'}$$

则得

$$\begin{aligned}0_{ZB}0_{AZ}&=(0_{Z'B}x_{Z'Z})(x_{ZZ'}0_{AZ'})\\&=0_{Z'B}(x_{ZZ'}x_{Z'Z})0_{AZ'}\\&=0_{Z'B}I_{Z'}0_{AZ'}\\&=0_{Z'B}0_{AZ'}\end{aligned}$$

于是,我们已证得如下定理.

定理 3 设范畴 $\mathscr{C}$ 中有零对象. Z 为 $\mathscr{C}$ 的任一个零对象, A,B 为 $\mathscr{C}$ 中任意的两个对象, 0_{AZ}, 0_{ZB} 分别为 $\mathrm{Hom}(A,Z)$, $\mathrm{Hom}(Z,B)$ 中的唯一元素,则 $0_{ZB}0_{AZ}$ 由 A,B 唯一确定而与 Z 的选取无关.

以 0_{AB} 或 0 记 $0_{ZB}0_{AZ}$,且称之为由 A 到 B(或 $\mathrm{Hom}(A,B)$ 中的)**零态射**(zero morphism).

我们可将定理 3 更明确地写成如下形式.

推论 1 设范畴 $\mathscr{C}$ 有零对象, $A,B\in\mathrm{Ob}\mathscr{C}$,则 $\mathrm{Hom}(A,B)$ 中存在唯一的零态射.

今后为简便起见,在不致混淆的情况下,对不同态射集中的零态射(如 $\mathrm{Hom}(A,B)$ 中的零态射, $\mathrm{Hom}(C,D)$ 中的零态射,…)都统称为零态射,并且都记成“0”.这样,我们就可叙述如下推论.

推论 2 设范畴 $\mathscr{C}$ 有零对象, $f\in\mathrm{Hom}(A,B)$, $g\in\mathrm{Hom}(B,C)$,且 $f=0$ 或 $g=0$,则 $gf=0$.

证 不失一般地可令 $f=0$, Z 为零对象,则

$$gf=g(0_{ZB}0_{AZ})=(g0_{ZB})0_{AZ}$$

注意

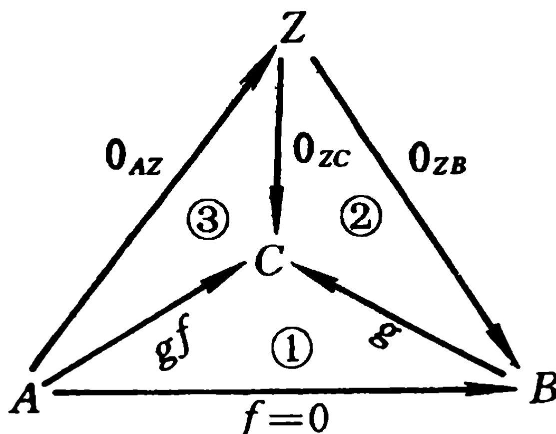
$$g0_{ZB}\in\mathrm{Hom}(Z,C)=\{0_{ZC}\}$$

因此

$$gf=0_{ZC}0_{AZ}=0_{AC}$$

即 $gf=0$. □

建议读者从下图中①,②网孔以及外三角形图的交换性推出网孔③的交换性,从而掌握一个证明推论 2 的直观的交换图法.



注 10　推论 2 之逆不成立,即对有零对象的范畴,非零态射中可能有零因子.

例 6　在加法 Abel 群范畴$\mathbb{AG}$中,考察非平凡群 B 与 B 的非平凡真子群 A. 令 $f:A\rightarrowtail B$,使 $f(a)=a$, $\forall a\in A$,则 $f\neq 0$. 再取

$$g:B\twoheadrightarrow B/A$$

为标准同态. 当然 $g\neq 0$. 但

$$gf(a)=g(a)=0(B/A\text{ 中的零元素}),\forall a\in A$$

因此 $gf=0$. 这里的非零态射 g,f 都是零因子.

习　题　1.1

1. 试给出一个由五个对象组成对象类的范畴 $\mathscr{C}$,使 $\mathscr{C}$ 恰有一个始对象,一个终对象,但无零对象.

2. 证明:在任意范畴 $\mathscr{C}$ 中,对态射而言,若 fg 为满态射,则 f 为满态射;若 gf 为单态射,则 f 为单态射.

3. 对群范畴$\mathbb{G}$,证明:单态射与单同态是等价概念,满态射与满同态也是等价概念.

§2 函子与自然变换

函子是研究两个范畴间的关系或同一范畴内在联系的一种重要工具，在范畴论中占有重要的位置. 在一定程度上，函子起着沟通不同学科或不同问题的作用. 在同调代数中，后面将要介绍的函子 Hom 与$\otimes$，以及它们的导出函子 Ext、Tor 是应用最广的工具. 粗略地讲，两范畴(可以是同一范畴)间的函子是对象间及态射间的一种对应，这种对应保持着相应态射的合成以及恒等态射的对应，可以看成是两范畴间的“同态”. 函子的精确定义如下.

定义 1 设 $\mathscr{C}$,$\mathscr{D}$ 为两个范畴，若 $F:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ 满足如下条件：

F_1: $\forall A\in \mathrm{Ob}\mathscr{C}, F(A)\in \mathrm{Ob}\mathscr{D}$;

F_2: $\forall A\in \mathrm{Ob}\mathscr{C}, F(I_A)=I_{F(A)}$;

F_3: $\forall \sigma\in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B), F(\sigma)\in \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(A),F(B))$;

F_4: $\forall \sigma\in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B), \tau\in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B,C)$,

$$F(\tau\sigma)=F(\tau)F(\sigma)$$

则称 F 为从 $\mathscr{C}$ 到 $\mathscr{D}$ 的一个**共变函子**(covariant functor).

若 F 满足 F_1,F_2 以及

F'_3: $\forall \sigma\in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B), F(\sigma)\in \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(B),F(A))$;

F'_4: $\forall \sigma\in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B), \tau\in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B,C)$,

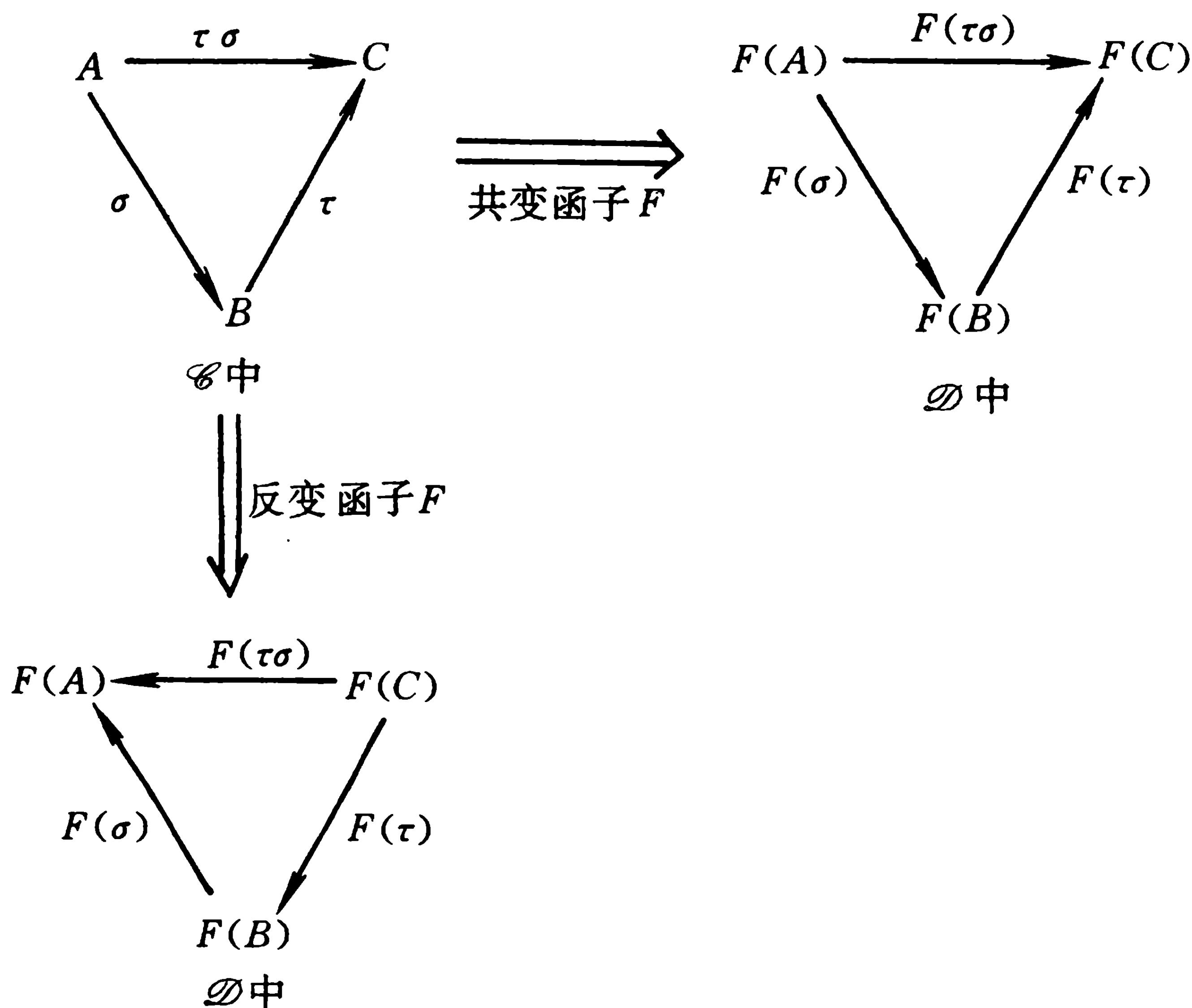
$$F(\tau\sigma)=F(\sigma)F(\tau)$$

则称 F 为从 $\mathscr{C}$ 到 $\mathscr{D}$ 的一个**反变函子**(contravariant functor).

上述定义可图示如下页.

由下页图可看出：共变函子与反变函子是对偶概念. 在只提“函子”时，常指“共变函子”与“反变函子”的总称. 但有些文献中，“函子”却是“共变函子”的简称.

显然，上节中$\circ:\mathscr{C}\to\mathscr{C}^{\circ}$($\mathscr{C}$ 的反范畴)即为一个反变函子. 这个函子使 $\mathscr{C}$ 中不同的态射变成不同的态射. 更一般地，我们给出如



下定义.

定义 2　设 $F:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ 为共变(反变)函子.若对任意的 $A,B\in \mathrm{Ob}\mathscr{C}$ 以及任意的 $\sigma,\sigma'\in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$,在 $\sigma\neq\sigma'$ 时必有 $F(\sigma)\neq F(\sigma')$,则称 F 为**忠实函子**(faithful functor).否则称 F 为**不忠实函子**注意函子的忠实性是对态射而言的

如果 $F:\mathscr{C}\to\mathscr{C}$ 使 $F(A)=A,\forall A\in \mathrm{Ob}\mathscr{C}$,且 $F(\sigma)=\sigma$ 对任意的 $\mathscr{C}$ 中态射成立,则 F 称为**恒等(单位)函子**(identity functor).容易看出,恒等函子是忠实函子.

在范畴论的应用中,特别是在同调代数中,最感兴趣的是所谓"**具体范畴**"(concrete category).通常认为:若范畴 $\mathscr{C}$ 的对象都是

集合，且态射首先是集映射，则 $\mathscr{C}$ 为具体范畴. 对这种范畴 $\mathscr{C}$ 中任意的对象 A，以 $u(A)$表示 A 的基础集(即将 A 只看作集合). 于是

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)\subseteq\mathrm{Hom}_{\mathbb{S}}(u(A),u(B)),\quad \forall A,B\in\mathrm{Ob}\mathscr{C}$$

且 $I_A=I_{u(A)}$. 容易看出，$u:\mathscr{C}\to\mathbb{S}$ 也是一个共变的忠实函子. 于是，更一般地，若有从范畴 $\mathscr{C}$ 到$\mathbb{S}$的忠实函子 $F:\mathscr{C}\to\mathbb{S}$，则称 $\mathscr{C}$ 为一个具体范畴.

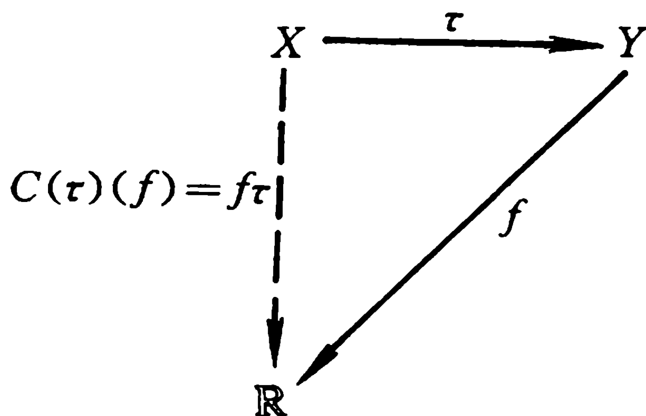
当具体范畴 $\mathscr{C}$ 的对象都具有某些结构时，比如拓扑群范畴$\mathbb{TG}$中的对象都有拓扑结构与群结构，上述的 u 起着"忘却 $\mathscr{C}$ 中对象的结构，只看作集合，态射也只看作集映射"的作用，特称为**忘却函子**(forgetful functor). 有时，将忘却部分结构的函子称为**部分忘却函子**. 比如忘却拓扑群的拓扑结构，只注意群结构，则得$\mathbb{TG}$ 到 $\mathbb{G}$ 的部分忘却函子.

下面再举几个关于函子的例子.

例 1 对任一拓扑空间 X(即 $X\in\mathbb{T}\mathrm{op}$ 或记为 $X\in\mathrm{Ob}\mathbb{T}\mathrm{op}$)，记 $C(X)$为 X 上的实(复)连续函数环(环运算由函数的加法、乘法定义). 对任意的 $X,Y\in\mathbb{T}\mathrm{op}$ 及 $\tau\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{T}\mathrm{op}}(X,Y)$，定义 $C:X\mapsto C(X)$，$C:\tau\mapsto C(\tau)$，其中

$$C(\tau)(f)=f\tau\in C(X),\quad \forall f\in C(Y)$$

即对任意的 $f\in C(Y)$，$C(\tau)(f)$使下图成为一个交换图：



容易看出，$C:\mathbb{T}\mathrm{op}\to\mathbb{R}\mathrm{ing}$ 为反变函子.

例 2　对任一群 G，记 N 为 G 的换位子群（即由一切换位子 $[x,y]$ 生成的子群），则 N 为 G 的正规子群，且 $G^{ab}\equiv G/N$ 为 Abel 群，称为 G 的 Abel 化．容易验知，$ab:\mathbb{G}\to\mathbb{A}G$ 为共变函子．

例 3　设 $\mathscr{C}$ 为任一范畴，固定 $A\in\mathrm{Ob}\mathscr{C}$，定义

$$F(B)=\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B),\quad \forall B\in\mathrm{Ob}\mathscr{C}$$

若 $\tau\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B,B')$，则定义

$$F(\tau):\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)\to\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B')$$

使 $F(\tau):\sigma\longmapsto\tau\sigma$，$\forall\sigma\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$，常记 $F(\tau)=\tau_*$，注意：$F(\tau)\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{S}}(\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B),\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B'))$！$F(\tau)$ 的定义也可用下面的交换图表示：

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\tau} & B' \\ \uparrow{\scriptstyle\sigma} & \nearrow & \\ A & & \end{array}\qquad \tau_*(\sigma)=F(\tau)(\sigma)=\tau\sigma$$

可以看出，$F=\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,—):\mathscr{C}\to\mathbb{S}$ 为共变函子．

这样，对任意范畴 $\mathscr{C}$ 与 $A\in\mathrm{Ob}\mathscr{C}$，我们都可得到 $\mathscr{C}$ 到 $\mathbb{S}$ 的一个共变函子．由此可看出函子在范畴论中的重要地位．比如当 $\mathscr{C}={}_R\mathfrak{M}$ 时，$\mathrm{Hom}_R(A,B)\in\mathbb{A}G$，$F$ 可反映出 A 的一些性质．

对偶于此例，我们有如下的例子．

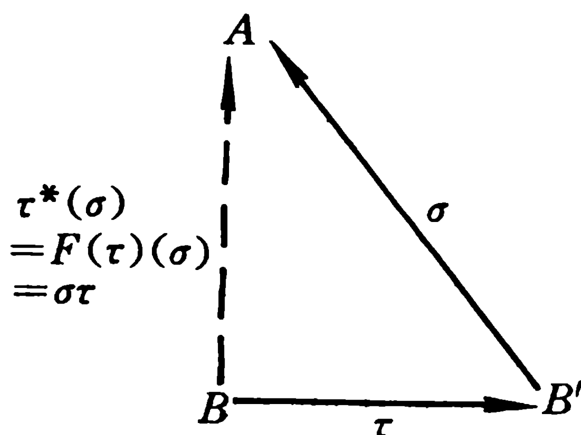
例 4　设 $\mathscr{C}$ 为任一范畴，固定 $A\in\mathrm{Ob}\mathscr{C}$，定义

$$F(B)=\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B,A),\ \forall B\in\mathrm{Ob}\mathscr{C}$$

若 $\tau\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B,B')$，则定义

$$F(\tau):\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B',A)\to\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B,A)$$

使 $F(\tau):\sigma\longmapsto\sigma\tau$，$\forall\sigma\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B',A)$，常记 $F(\tau)=\tau^*$．$F(\tau)$ 的定义也可表如下面的交换图：



由此可看出，$F=\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-,A):\mathscr{C}\to\mathbb{S}$ 对任意的 $A\in\mathrm{Ob}\mathscr{C}$ 都给 $\mathscr{C}$ 到$\mathbb{S}$ 的一个反变函子. 此例事实上概括了例 1(取这里的 $A=\mathbb{R}$，$\sigma=f$).

建议读者思考一下：能否将上述的 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,-)$定义成 $\mathscr{C}$ 到$\mathbb{S}$的反变函子？能否将 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-,A)$定义成 $\mathscr{C}$ 到$\mathbb{S}$ 的共变函子？为什么？

例 5 设$\mathbb{LS}_K$ 为域K 上的线性空间范畴($\mathrm{Ob}\mathbb{LS}_K$ 为K 上全体线性空间，态射为 K－线性映射)，则任意的 $V\in\mathrm{Ob}\mathbb{LS}_K$ 都有对偶(共轭)空间 $V^*\equiv\mathrm{Hom}_K(V,K)$，注意到 $K\in\mathrm{Ob}\mathbb{LS}_K(\dim K=1)$与例 4 同理知(取 $A=K$)，

$$*\equiv\mathrm{Hom}_K(-,K):\mathbb{LS}_K\to\mathbb{LS}_K$$

为反变函子.

今后，我们最感兴趣的范畴是(左)R－模范畴${}_R\mathfrak{M}$，特别是${}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M}$(即$\mathbb{AG}$!)，或者更一般地说，是概括它们的如下一类范畴.

定义 3 设有零对象范畴 $\mathscr{C}$ 中，对一切 $A,B\in\mathrm{Ob}\mathscr{C}$，$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)\in\mathrm{Ob}\mathbb{AG}$(对加法)且态射合成与加法满足分配律. 即，在可合成与可加的情况下，有

$$(\tau_1+\tau_2)(\sigma_1+\sigma_2)=\tau_1\sigma_1+\tau_1\sigma_2+\tau_2\sigma_1+\tau_2\sigma_2$$

则称 $\mathscr{C}$ 为**预加法范畴**(pre－additive category).

对预加法范畴可定义一类常用的函子——加法函子.

定义 4 设 $\mathscr{C},\mathscr{D}$ 都是预加法范畴. 若函子(共变或反变) $F:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ 满足

$$F(f+g)=F(f)+F(g),\quad \forall f,g\in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$$

即

$$F:\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)\to \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(A),F(B))$$

$$(\text{或 } \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)\to \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(B),F(A)))$$

为 Abel 群同态,则称 F 为**加法(性)函子**(additive functor).

容易看出,对 ${}_R\mathfrak{M}$ 用例 3,例 4 中的方法给出的 $\mathrm{Hom}_R(A,-)$ 与 $\mathrm{Hom}_R(-,A)$ 都是加法函子(注意 ${}_R\mathfrak{M},{}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M}$ 当然为预加法范畴),它们分别为共变加法函子与反变加法函子. 这里简化记号 Hom_R 意指 $\mathrm{Hom}_{R}\ \mathfrak{M}$.

下面来介绍函子间的关系——自然变换与自然等价. 事实上,范畴论的历史就源于函子间自然等价的研究. 读者可参看范畴论的第一篇论文[EM,45](S. Eilenberg 与 S. MacLane 的论文《自然等价的一般理论》).

设 $\mathscr{C},\mathscr{D}$ 为两个范畴. 在通常的情况下,从 $\mathscr{C}$ 到 $\mathscr{D}$ 有很多函子. 研究这些函子之间的关系与分类无疑是至关重要的. 由前我们已可看出两个事实:一是交换图可带来丰富的信息;二是从 $\mathscr{C}$ 到 $\mathscr{D}$ 的函子 F 将 $\mathscr{C}$ 中态射(箭头) $A\xrightarrow{\sigma}B$ 变成 $F(A)\xrightarrow{F(\sigma)}F(B)$ (F 为共变函子时)或 $F(A)\xleftarrow{F(\sigma)}F(B)$ (F 为反变函子时),而且将 $\mathscr{C}$ 中的任意交换图变成 $\mathscr{D}$ 中的交换图. 为了获取更多的信息,很自然地会要求这些对应的态射之间及交换图之间有某种联系. 以态射为例,设 $F,G:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ 为两个共变函子,我们要求有一种变换 $t:F\to G$,落实到任意的 $X\in \mathrm{Ob}\mathscr{C}$,有 $t_X:F(X)\to G(X)$ ($\mathscr{D}$ 中的态射)使对 $\mathscr{C}$ 中的任意态射 $A\xrightarrow{\sigma}B$,有如下的交换图:

$$\begin{array}{ccc} F & & F(A) \xrightarrow{F(\sigma)} F(B) \\ \Big\downarrow t & \Rightarrow & t_A \Big\downarrow \qquad\qquad \Big\downarrow t_B \\ G & & G(A) \xrightarrow{G(\sigma)} G(B) \end{array}$$

这样就可给出 F,G 的一些具体的关系. 如果又有 G 到 F 的这种变换 s 使 st,ts 都是“恒等变换”,则 F,G 本质上是等价的,由此可将由 $\mathscr{C}$ 到 $\mathscr{D}$ 的函子分成等价类进行研究与应用.

再换一个角度,令 $F:\mathscr{C}\to\mathscr{D},G:\mathscr{D}\to\mathscr{C}$ 都是共变函子,如果 $FG\simeq I_{\mathscr{D}}$ ($\mathscr{D}$ 到 $\mathscr{D}$ 的恒等函子),且 $GF\simeq I_{\mathscr{C}}$ ($\mathscr{C}$ 到 $\mathscr{C}$ 的恒等函子),这里“$\simeq$”表示上段意义下的等价. 则大量的事实可说明:$\mathscr{C}$ 与 $\mathscr{D}$ 有许多相同的性质. 这又给出了范畴分类研究的依据.

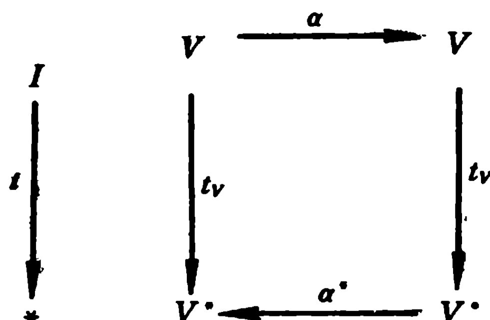
值得注意的是,上面的要求在许多情况下是达不到的(见下例). 也正因为如此,更加大了研究上述想法的意义.

例 6 设 K 为一个域,V 为 K 上的一个线性空间,$V^*=\mathrm{Hom}_K(V,K)$ 为 V 的对偶空间. 我们已知道(参见例 4、例 5) $*$ 为 $\mathbb{L}\mathrm{S}_K$ 到自身的反变函子. 尽管当 $\dim_K V<\infty$ 时 $V\simeq V^*$,但恒等函子 I 与 $*$ 间 也找不到上面要求的变换(即使不计较 $I(A)=A\xrightarrow{I(\sigma)=\sigma}I(B)=B$ 与 $A^*\xleftarrow{\sigma^*}B^*$ 箭头的反向). 比如取 K 使 $|K|>3$(于是必有 $c\in K$ 使 $c^2\neq1,c\neq0$),取 V 为以 $\{e_1\}$ 为基的 1 维线性空间. 此时,

$$\dim_K V^*=\dim_K V=1$$

于是必有 V^* 的基 $\{e^1\}$ 使 $e^1(e_1)=1$. 令 $V\xrightarrow{\alpha}V$ 使 $\alpha(e_1)=ce_1$, $c^2\neq1,c\neq0,c\in K$. 如果 I 到 $*$ 有上面讲的那种变换 t,则用于 $I(V)=V\to V^*$,一定是一个 K-线性映射 t_V. 因此可令 $t_V(e_1)=be^1,b\in K$(对不平凡的 t,当然可要求 $b\neq0$). 为说明 t 不存在,

只需验证下图一定不是交换图.



为此只需证

$$\alpha^* t_V \alpha(e_1) \neq t_V(e_1)$$

注意两边都是 V^* 中的元素,即 V 到 K 的线性函数,欲证两边不等,只需将两边作用于 e_1,比较所得的 K 值即可.事实上,

$$\begin{aligned}
&\alpha^* t_V\alpha(e_1)(e_1) = \alpha^* t_V(ce_1)(e_1)\\
&= c\alpha^* t_V(e_1)(e_1) = c\alpha^* be^1(e_1)\\
&= cb\alpha^*(e^1)(e_1) \xlongequal[\text{例 4}]{} cbe^1\alpha(e_1)\\
&= c^2 be^1(e_1) = c^2 b
\end{aligned}$$

但

$$t_V(e_1)(e_1) = be^1(e_1) = b$$

由 $b \neq 0, c^2 \neq 1$ 即知二者不等.于是想找 I 到 $*$(或 $*$ 到 I)的这种变换是办不到的(除非是平凡的).因此,尽管 $*$ 保持着有限维线性空间的维数,但不是我们理想中的好函子.现在,我们将 $*$ 加工一下,希望能得出理想中的函子.下面对域 K 不再作任何限制.

令 $V^{**} = (V^*)^* = \mathrm{Hom}_K(V^*, K)$,称为 V 的二重对偶空间.由于 $*$ 为反变函子,$**$ 为 $*$ 作用两次,因此 $**$ 成为LS_K 到自身的一个共变函子.

注意对任意的 $X \in \mathrm{ObLS}_K$ 的任意元素 x 都有一个 x^{**} 使对任意的 $y \in X^* = \mathrm{Hom}_K(X, K)$ 有

$$x^{**}(y) = y(x) \in K \tag{1}$$

于是

$$x^{**}(y+z)=(y+z)(x)=y(x)+z(x)$$
$$=x^{**}(y)+x^{**}(z)$$
$$x^{**}(ky)=(ky)(x)=ky(x)=kx^{**}(y),\quad \forall y,z\in X^*,k\in K$$

因此 $x^{**}\in X^{**}$.现在由

$$t_X(x)=x^{**},\quad \forall x\in X \tag{2}$$

定义 K-线性映射 $t_X:X\to X^{**}$,则有

$$t_X(x)(y)=x^{**}(y)\underset{(1)}{=\!=}y(x),\quad \forall y\in X^* \tag{3}$$

下面来证下图

$$\begin{array}{ccc} I(V)=V & \xrightarrow{I(f)=f} & V_1=I(V_1) \\ \downarrow{t_V} & & \downarrow{t_{V_1}} \\ V^{**} & \xrightarrow{f^{**}} & V_1^{**} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \forall V,V_1\in \mathrm{Ob}\mathbb{L}\mathrm{S}_K \\ f\in \mathrm{Hom}_K(V,V_1) \end{array}$$

为交换图.这样 $t=\{t_X\mid X\in \mathrm{Ob}\mathbb{L}\mathrm{S}_K\}$即为欲求的从函子 I 到 $**$ 的变换.显然地,这归于证明:$f^{**}t_V(v)$与 $t_{V_1}f(v)$作为 V_1^{**} 的元素对任何 $g_1\in V_1^*$ 的作用都得到 K 中的同一元素,其中 $v\in V$ 为任意元素.

事实上,记 $f(v)=v_1$, $\forall v\in V$,我们有

$$(f^{**}t_V(v))(g_1)\underset{(2)}{=\!=}f^{**}(v^{**})(g_1)$$
$$\underset{\text{例 4}}{=\!=}v^{**}f^*(g_1)=v^{**}(f^*(g_1))$$
$$\underset{\substack{f^*(g_1)\in V^*\\ \text{再用(1)}}}{=\!=\!=\!=}(f^*(g_1))(v)\underset{\text{例 4}}{=\!=}g_1f(v)=g_1(v_1)$$
$$t_{V_1}f(v)(g_1)=t_{V_1}(v_1)(g_1)\underset{(3)}{=\!=}g_1(v_1)$$

因此上图是交换图.

我们称这个 t 为$\mathbb{LS}_K$ 到自身的两个函子 I(恒等函子)、** 间的自然变换.更一般地,我们给出如下的定义.

定义 5　设$\mathscr{C}$,$\mathscr{D}$为两个范畴,$E,F:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$为两个共变函子.若有 $t=\{t_A:E(A)\to F(A)\mid\forall A\in\mathrm{Ob}\mathscr{C},t_A$ 为 $\mathscr{D}$ 中的态射$\}$,使对 $\mathscr{C}$ 中任意的态射 $f:A\to A_1$ 都有 $\mathscr{D}$ 中的交换图

$$\begin{array}{ccc} E(A) & \xrightarrow{E(f)} & E(A_1) \\ \downarrow{t_A} & & \downarrow{t_{A_1}} \\ F(A) & \xrightarrow{F(f)} & F(A_1) \end{array}$$

则称 $t:E\to F$ 为函子间的一个**自然变换**(natural transformation),记为

$$E\xrightarrow[\text{nat}]{t}F$$

(箭头上的 t 有时可省去).

对两个反变函子可类似地定义它们之间的自然变换.但出于应用价值的考虑,我们不讨论共变函子与反变函子间的(或反变函子与共变函子之间的)自然变换.

定义 6　若定义 5 中的 t 使对任何 $A\in\mathrm{Ob}\mathscr{C}$,$t_A$ 都是 $\mathscr{D}$ 中的同构(等价),则称 E,F 为**自然等价的**,t 称为E 到 F 的一个**自然等价**(natural equivalence),常记为 $E\underset{\text{nat}}{\simeq}F$.

显然,自然等价是函子间的一种等价关系.可据此分别将 $\mathscr{C}$ 到 $\mathscr{D}$ 的共变函子、反变函子分成自然等价类进行研究.

例 6 说明:作为$\mathbb{LS}_K$ 到自身的共变函子I,**,有 $I\xrightarrow[\text{nat}]{t}**$.但二者并非自然等价.因为当 $\dim_K V=\infty$时 V 与 V^{**} 并不同构.今后我们会碰到许多重要的自然等价函子对,它们对相关范畴的研究起着重要的作用.

考察相应的交换图,显然可得如下结果.

定理 1 设 $E,F,G:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ 同为范畴 $\mathscr{C}$ 到 $\mathscr{D}$ 的共变函子或同为 $\mathscr{C}$ 到 $\mathscr{D}$ 的反变函子.

(i) 若 $E\xrightarrow[\text{nat}]{t}F$, $F\xrightarrow[\text{nat}]{s}G$, 则 $E\xrightarrow[\text{nat}]{st}G$;

(ii) 若 $E\underset{\text{nat}}{\simeq}F$, $F\underset{\text{nat}}{\simeq}G$, 则 E,F,G 中任意两个都是自然等价的.

利用函子的自然等价还可将范畴进行等价分类.为此,下面再给出范畴等价的定义.

定义 7 设 $\mathscr{C},\mathscr{D}$ 为两个范畴,且有两个共变函子 $F:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ 与 $G:\mathscr{D}\to\mathscr{C}$ 使

$$FG\underset{\text{nat}}{\simeq}I_{\mathscr{D}},\quad GF\underset{\text{nat}}{\simeq}I_{\mathscr{C}},$$

则称 F 为 $\mathscr{C}$ 到 $\mathscr{D}$ 的一个**等价函子**(equivalent functor),G 称为 F 的**逆等价函子**(inverse equivalent functor),并称 $\mathscr{C}$ 与 $\mathscr{D}$ 为**等价范畴**(equivalent categories).

若上述的"$\underset{\text{nat}}{\simeq}$"改为"$=$",则称 F 为 $\mathscr{C}$ 到 $\mathscr{D}$ 的**同构**,G 为 F 的**逆同构**,并称 $\mathscr{C}$ 与 $\mathscr{D}$ 为**同构范畴**(isomorphic categories),记为 $\mathscr{C}\simeq\mathscr{D}$. $\mathscr{C}$ 与 $\mathscr{D}$ 等价时则记为 $\mathscr{C}\approx\mathscr{D}$.

显然有

定理 2 设 $\mathscr{C},\mathscr{D},\mathscr{E}$ 都是范畴.

(i) 若 $\mathscr{C}\approx\mathscr{D}$,则 $\mathscr{D}\approx\mathscr{C}$;

若 $\mathscr{C}\approx\mathscr{D}$ 且 $\mathscr{D}\approx\mathscr{E}$,则 $\mathscr{C}\approx\mathscr{E}$;

$\mathscr{C}\approx\mathscr{C}$.

(ii) 若 $\mathscr{C}\simeq\mathscr{D}$,则 $\mathscr{D}\simeq\mathscr{C}$;

若 $\mathscr{C}\simeq\mathscr{D}$ 且 $\mathscr{D}\simeq\mathscr{E}$,则 $\mathscr{C}\simeq\mathscr{E}$;

$\mathscr{C}\simeq\mathscr{C}$.

(iii) 若 $\mathscr{C}\simeq\mathscr{D}$,则 $\mathscr{C}\approx\mathscr{D}$,但反过来未必成立.

证 只需证 $\mathscr{C}\approx\mathscr{D}\not\Rightarrow\mathscr{C}\simeq\mathscr{D}$,其他都是显见的.

事实上,取 $\mathscr{C}$ 使 $\mathrm{Ob}\mathscr{C}=\{K\}$,其中 K 为任一域,$\mathrm{Hom}_K(K,K)$

为其唯一的态射集,态射合成即 K－线性映射的合成. 取 $\mathscr{D}$ 使 $\mathrm{Ob}\mathscr{D}$ 为 K 上同构于 K 的全体线性空间(当然都是1维的):

$$\mathrm{Ob}\mathscr{D}=\{T_1, T_2, \cdots \mid T_j \simeq K, T_1 \neq T_2\}$$

态射集及态射合成同LS_K. 容易看出,$\mathscr{C} \approx \mathscr{D}$. 但 $\mathscr{C} \simeq \mathscr{D}$ 不会成立. □

据此定理可将全体范畴所成的类分成等价类或同构类进行研究. 等价范畴具有许多共同的性质. 当然,同构范畴的共性则更多.

今后为简化记号,常将 $F(A)$(函子 F 作用于对象 A)记为 FA,将 F 对态射 σ 的作用 $F(\sigma)$ 记为 $F\sigma$.

习　题　1.2

1. 设 $F: \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ 为共变或反变函子,$f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ 为一个等价(同构),试证 Ff 在 $\mathscr{D}$ 中也是一个等价(同构).

2. 设 $\mathscr{C}$ 为预加法范畴,$A, B \in \mathrm{Ob}\mathscr{C}$. 问:作为加法 Abel 群,$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ 中的零元素与通过零对象定义的零态射 O_{AB} 有何关系? 为什么?

3. 设 G, H 为乘法群,$\mathscr{C}$ 为以 G 为唯一对象的范畴,$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(G, G) = G$,态射合成即 G 的乘法运算. $\mathscr{D}$ 为以 H 为唯一对象的范畴,$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(H, H) = H$,态射合成也是 H 的乘法运算. 证明:任意共变函子 $F: \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ 都给出一个群同态 $f: G \to H$. 反过来,如果 $f: G \to H$ 为群同态,f 能否诱导出一个函子 $F: \mathscr{C} \to \mathscr{D}$?

4. 设 R 为任意环. 对任意的 $M \in {}_R\mathfrak{M}$(即 $M \in \mathrm{Ob}_R\mathfrak{M}$),定义 $M^* = \mathrm{Hom}_R(M, R)$. 试给出 M^* 的右 R－模结构. 进而取 $M^{**} = (M^*)^*$,将例 6 的结果推广到 ${}_R\mathfrak{M}$ 上,即证明 ${}_R\mathfrak{M}$ 到自身的两个函子 $I_R\mathfrak{M}$ 与 $**$ 之间存在着自然变换.(对 R－模概念不熟悉的读者可参看下节开头的定义.)

5. 设 R 为任意环,将 R 中的加法运算保留而定义另一种乘法运算为 $a \circ b = ba$(右边为环 R 的乘法),则得一个新环 R°,称为 R 的反环(opposite ring). 当 R 为交换环时,R° 与 R 相同. 在一般的情况下,它们的中心相同. 问: ${}_R\mathfrak{M}$ 与 $\mathfrak{M}_R$ 有何关系? 能否找到这两个范畴之间的函子以说明这两个范畴间的关系?

6. 设 GL_n 为交换环范畴 CRing 到群范畴 G 的一个函子,它将任意交换环 R 变成 R 上 n 阶可逆矩阵群(称为 R 上的 n 阶(维)一般线性群),U:

$\mathbb{C}$Ring→$\mathbb{G}$ 为将任意交换环 R 变成 $U(R)$（R 的可逆元所成的乘法群，称为 R 的乘法群）的函子. 证明：行列式产生一个自然变换 $\det: GL_n \xrightarrow[\text{nat}]{} U(R)$.

§3　环模的张量积与函子⊗

模论，即环模的理论，已形成一个引人注目的代数学分支，是同调代数研究的主要对象之一. 它也是研究环论、群表示论等的有力工具，在代数几何、代数数论与算子代数等学科中都有重要的应用. 本节中先将环模的定义与基本性质简单地回顾一下，使未学过模论的读者学习下面的内容不致因此而发生困难.

今后提到的环都是指有单位元的结合环.

定义 1　设 R 为环，M 为一个加法 Abel 群（交换群）. 若对 M 中的任意元 m 与 R 中的任意元 r，都有满足如下条件的运算（左 R－模运算）$rm\in M$：

(i) $(r_1+r_2)(m_1+m_2)=r_1m_1+r_1m_2+r_2m_1+r_2m_2$，$\forall\, r_j\in R, m_j\in M, j=1,2$；

(ii) $(r_1r_2)m=r_1(r_2m)$，$\forall\, r_j\in R, j=1,2, m\in M$；

(iii) $1_Rm=m$，$\forall\, m\in M$，

则称 M 为一个**左 R－模**(left R－module)，记为 $M\in {}_R\mathfrak{M}$ 或 ${}_R\mathfrak{M}$.

注 1　有些文献上省去(iii). 而对有(iii)的 M 称为**酉模**(unitary module)，也称为单式模. 因此在许多文献上均先声明“本文（书）中的模均指酉模……”.

注 2　我们今后论及“R－模”均指定义 1 中定义的“左 R－模”. 但在有必要时仍将“左”字强调出来. 又定义 1 中的记号“${}_R\mathfrak{M}$”今后也意指左 R－模范畴，$M\in {}_R\mathfrak{M}$ 事实上是 $M\in \mathrm{Ob}_R\mathfrak{M}$ 的简记. 对其他范畴 $\mathscr{C}$，$X\in \mathrm{Ob}\mathscr{C}$ 今后也常简记为 $X\in\mathscr{C}$.

对应地，我们可定义右 R－模. M 为右 R－模时，记为 $M\in \mathfrak{M}_R$. 左环模的理论与右环模的理论是基本上平行的. 特别地，当

R 为交换环时,左 R-模与右 R-模可不加区别.

可直接验证如下结果(由此可得左 R-模的一个等价定义).

命题 1 设 M 为加法 Abel 群. $\mathrm{End}M$ 为其自同态环. 则 $M \in {}_R\mathfrak{M}$ 的充分必要条件是存在环同态 $\rho: R \to \mathrm{End}M$.

由定义 1 与命题 1 都可看出:加法 Abel 群范畴$\mathbb{AG}$ 就是${}_{\mathbf{Z}}\mathfrak{M}$;环 R 的一切左理想都是左 R-模. 因此,模论不仅是线性空间理论的推广,也是理想论的推广. 特别地,PID(主理想整环)上的模论已概括了 Abel 群论中最基本的一些结果.

以后,我们还将用到双模的概念. 其定义如下.

定义 2 设 R, S 为两个环(可以是同一环), $M \in {}_R\mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}_S$ 且满足

$$(rm)s = r(ms), \forall r \in R, m \in M, s \in S,$$

则称 M 为一个 $R-S$ **双模**(bimodule),记为 $M \in {}_R\mathfrak{M}_S$ 或${}_R\mathfrak{M}_S$.

定义 3 设 $M, N \in {}_R\mathfrak{M}$, $f: M \to N$ 满足

$$f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2), \quad \forall m_1, m_2 \in M$$
$$f(rm) = rf(m), \quad \forall r \in R, \quad m \in M$$

则称 f 为 M 到 N 的(左)**R-模同态**或(左)R-映射(同态),记为 $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ 或 $f \in \mathrm{Hom}(M, N)$. 在有必要强调"左 R-模"同态时,也使用范畴中态射记号 $f \in \mathrm{Hom}_{R\mathfrak{M}}(M, N)$.

$$\mathrm{Ker}f \equiv f^{-1}(0) \equiv \{m \in M \mid f(m) = 0\}$$

称为 f 的**核**(kernel).

$$\mathrm{Im}f = f(M)$$

称为 f 的**象**(image).

$\mathrm{Ker}f = \{0\}$ 时也记为 $\mathrm{Ker}f = 0$, 称 f 为**单同态**(monomorphism). $\mathrm{Im}f = N$ 时称 f 为**满同态**(epimorphism).

$\mathrm{Coker}f \equiv N/\mathrm{Im}f$ 称为 f 的**上核**(cokernel). 容易看出:核是单性的度量,上核是满性的度量. 既单又满的同态称为**同构**. 常记为 $M \simeq N$, 需强调同构 f 时也记为 $M \overset{f}{\simeq} N$ 或 $f: M \xrightarrow{\simeq} N$.

定义 4 设 $M\in {}_R\mathfrak{M}$，M'为M的加法子群且$RM'\subseteq M'$，则称M'为M的(左 R—)**子模**(submodule)，记为 $M'<M$，必要时记为 $M'<M\in {}_R\mathfrak{M}$ 或 $M'\underset{R}{<}M$. M'到M的嵌入映射 i 显然是单同态，称为**嵌入同态或包含同态**(inclusion homomorphism). 当 $M'\neq M$ 时又称M'为M的**真子模**(proper submodule).

我们来看几个例子.

例 1 设J为R的左理想，则 $J<R\in {}_R\mathfrak{M}$. 事实上二者是一回事.

例 2 设 $I\lhd R$，即 I 为R的理想，R/I 为对应的商环，$M\in {}_R\mathfrak{M}$ 且 $IM=0$，则 $M\in {}_{R/I}\mathfrak{M}$. 事实上记$\bar{r}=r+I\in R/I$，定义$\bar{r}m=rm$ 即知. 其实，可以证明：在 $M\in {}_R\mathfrak{M}$ 时，$M\in {}_{R/I}\mathfrak{M}\Leftrightarrow IM=0$. 因此常取 $I=l.\mathrm{Ann}_RM\equiv\{r\mid rM=0\}$，且称为 M 的**左零化子**(left annihilator).

例 3 设 $M_j<M\in {}_R\mathfrak{M}$，$j=1,2$，可验知 $M_1+M_2<M$. 又若 $M_j<M\in {}_R\mathfrak{M}$，$\forall j\in J$，则$\bigcap_{j\in J}M_j<M$.

由此例可引出如下定义.

定义 5 设 $X\subseteq M\in {}_R\mathfrak{M}$，记

$$\langle X\rangle=\bigcap_{X\subseteq M_j<M}M_j$$

且称$\langle X\rangle$为 X 生成的M的子模，X 称为$\langle X\rangle$的**生成集**或生成系. 当一个左 R－模 N 由有限多个元素生成时，称 N 为**有限生成的**(finitely generated). 记为 $N\in \mathrm{f\cdot g\cdot}_R\mathfrak{M}$ 或简记为 $N\in \mathrm{f\cdot g\cdot}$. 特别地，由一个元素生成的模叫**循环模**(cyclic module).

比如，循环加群即循环$\mathbb{Z}$－模.

定义 6 设 $N<M\in {}_R\mathfrak{M}$，对加法商群 M/N 定义运算

$$r(m+N)=rm+N$$

所得的左 R－模 M/N 称为M关于N的(左 R－)**商模**(quotient module).

仿加法群同构定理之证(只要多考虑一个 R 乘运算)可得模同态的几个基本定理.

定理 1 (模的第一同构定理)设 $f\in \mathrm{Hom}_R(M,N)$,则 $\mathrm{Ker}f<M$ 且

$$\mathrm{Im}f\overset{g}{\simeq}M/\mathrm{Ker}f$$

其中 $g:f(m)\mapsto m+\mathrm{Ker}f$.

由此定理可得

定理 2 (模的第二同构定理)设 $M_j<M\in{}_R\mathfrak{M},j=1,2$,则

$$M_1/(M_1\cap M_2)\overset{g}{\simeq}(M_1+M_2)/M_2$$

其中 $g:m_1+M_1\cap M_2\mapsto m_1+M_2$.

证 令 $\pi:M\twoheadrightarrow M/M_2$ 为标准同态,$f=\pi|M_1$(π 在 M_1 上的限制),则

$$\mathrm{Ker}f=M_1\cap M_2$$

$$\mathrm{Im}f=(M_1+M_2)/M_2$$

于是由定理 1 即得证. □

定理 3 (模的第三同构定理——双商定理). 设 $M_j<M\in{}_R\mathfrak{M},j=1,2$,且 $M_2\subseteq M_1$,则有(左)R-模同构

$$M/M_1\simeq M/M_2\Big/M_1/M_2$$

证 由

$$f(m+M_2)=m+M_1$$

定义模同态

$$f:M/M_2\longrightarrow M/M_1$$

则

$$\mathrm{Ker}f=M_1/M_2$$

$$\mathrm{Im}f=M/M_1$$

因此由定理 1 即得证. □

定理 4 (对应定理)设 $N<M\in{}_R\mathfrak{M};\pi:M\twoheadrightarrow M/N$ 为标准

同态，则 M/N 的子 R－模全体与 M 的含 N 的子 R－模全体是一一对应的，即

$$\{L \mid L < M/N\} \overset{1-1}{\longleftrightarrow} \{T \mid N < T < M\}$$
$$L \longmapsto \pi^{-1}(L) = T$$

证 显然. □

定理 5 设 $M \in {}_R\mathfrak{M}$，则

(i) M 为循环 R－模的充分必要条件是有 R 的左理想 I 使

$$M \simeq R/I \in {}_R\mathfrak{M}$$

(ii) 设 $M = \langle x \rangle \in {}_R\mathfrak{M}$，则(i)中的 I 可取为

$$I = l\mathrm{Ann}_R\, x \equiv \{r \mid r \in R, rx = 0\}$$

当 $l\mathrm{Ann}_R\, x = 0$ 时，$M \simeq R$（作为左 R－模）.

证 注意

$$R/I = \langle 1 + I \rangle$$

其中 1 表 R 的单位元. 建议读者自行验证. □

现在来介绍环模张量积的概念.

域上线性空间的张量积最早出现于张量代数中，也是外代数与对称代数中的基础性概念，为几何学与物理学中常用的工具之一.

设 $V_1, V_2 \in \mathbb{LS}_K$（$K$ 为域，比如 $K = \mathbb{R}$（实数域），$\mathbb{C}$（复数域））. $\{e_i \mid i \in I\}$，$\{f_j \mid j \in J\}$ 分别为 V_1, V_2 的基. 最老的张量积定义是：称以 $\{e_i \otimes f_j \mid i \in I, j \in J\}$ 为基的 K－线性空间为 V_1, V_2 的张量积，并记成 $V_1 \underset{K}{\otimes} V_2$. 这种定义虽可照搬到交换环上的自由模（有基模），但对一般的模无法照搬. 经一些数学家的努力，将此定义用双线性映射及泛性质作了特征刻画，进而推广到交换环上的一般环模，在这之后，由于理论发展与应用的需要，又被进一步地推广到非交换环上的环模.

这里先给出交换环上环模张量积的定义，它是域上用双线性映射定义线性空间的张量积这一方法的照搬.

定义 7　设 R 为交换环，$A,B,T\in{}_R\mathfrak{M}$，$f:A\times B\to T$ 为 R－**双线性映射**（记为 $f\in\mathrm{BL}(A,B;T)$），即 f 满足

$$f(r_1a_1+r_2a_2,b)=r_1f(a_1,b)+r_2f(a_2,b)$$

$$f(a,r_1b_1+r_2b_2)=r_1f(a,b_1)+r_2f(a,b_2),$$

$$\forall a,a_j\in A,b,b_j\in B,r_j\in R,j=1,2$$

且 (T,f) 具有如下的泛性质（universal property）（称为 R－双线性映射的泛性质，或张量积的泛性质）：

对任意的 $M\in{}_R\mathfrak{M}$ 与任意的 $g\in\mathrm{BL}(A,B;M)$ 都有唯一的 R－模同态 h 使 $g=hf$，即有如下的交换图

$$\begin{array}{ccc} A\times B & \xrightarrow{\ f\ } & T \\ \downarrow{\scriptstyle\forall g} & \swarrow{\scriptstyle h\exists|} & \\ \forall M & & \end{array}$$

则 (T,f) 或 T 称为 A,B 的**张量积**（tensor product），记为 $T=A\underset{R}{\otimes}B$，并记 $f(a,b)=a\otimes b$（称为 a,b 的张量积），$\forall a\in A,b\in B$. 因此也将 f 记为 $\otimes$ 或 $\underset{R}{\otimes}$.

如果作一个范畴 $\mathbb{T}\equiv\mathbb{T}_{AB}$ 使

$\mathrm{Ob}\,\mathbb{T}=\{(M,g)\mid M\in{}_R\mathfrak{M},g\in\mathrm{BL}(A,B;M)\}$,

$\mathrm{Hom}_{\mathbb{T}}((M,g),(M_1,g_1))=\{h\in\mathrm{Hom}_R(M,M_1)\mid g_1=hg\}$,

态射合成法则同 ${}_R\mathfrak{M}$ 中一样，则可将上述定义用范畴语言简述为：

交换环 R 上两个 R－模 A,B 的张量积即范畴 $\mathbb{T}$ 的始对象.

很自然地，我们需证张量积的存在性与唯一性（同构意义下）. 即证

定理 6　设 R 为交换环，$A,B\in{}_R\mathfrak{M}$，则 $A\underset{R}{\otimes}B\in{}_R\mathfrak{M}$ 存在，且

在 R－模同构意义下是唯一的.

证 存在性:令 F 为以集合 $A\times B$ 作基的自由 R－模(有基 R－模),取 F 的子模

$$S=\langle\{(a_1+a_2,b)-(a_1,b)-(a_2,b),(a,b_1+b_2)-(a,b_1)-(a,b_2),\\ (r_1a,r_2b)-r_1r_2(a,b)\mid a,a_j\in A,b,b_j\in B,r_j\in R\}\rangle$$

(即由上述集合$\{\cdots\}$生成的 F 的子 R－模).取 $A\bigotimes_R B=F/S$,容易验证它满足定义 7 的条件,这就证出了存在性.

唯一性:由范畴中始对象在同构(等价)意义下的唯一性(本章§1 定理 2)即知.建议读者给出另一种直接的证法. □

上述定义与定理 6 当然概括了线性空间张量积的定义,以及它的存在与唯一性,而且(当 R 为交换环时!)可递推地对任意 R－模 M 定义

$$\bigotimes^n M\equiv\underbrace{M\bigotimes_R M\bigotimes_R\cdots\bigotimes_R M}_{n}$$

作与线性空间或 Abel 群一样含意的直和(详细介绍将在本章§6 给出)

$$\bigotimes M\equiv\bigoplus_{n=0}^{\infty}(\bigotimes^n M),\quad 其中约定\bigotimes^0 M=R,$$

则$\bigotimes M\in{}_R\mathfrak{M}$.再定义$\bigotimes M$ 中的乘法为(仍记为$\otimes$)

$$(m_1\otimes m_2\otimes\cdots\otimes m_j)\otimes(m_{j+1}\otimes m_{j+2}\otimes\cdots\otimes m_k)\\ =m_1\otimes m_2\otimes\cdots\otimes m_j\otimes m_{j+1}\otimes m_{j+2}\otimes\cdots\otimes m_k$$

的线性开拓(因此$\bigotimes^p M$ 中元素与$\bigotimes^q M$ 中元素之积在$\bigotimes^{p+q}M$ 中),则得到一个有单位元 1_R 的(分次)结合 R－代数,称为 M 上的**张量代数**(tensor algebra)如果取 $R=K$ 为域,则得线性空间上的张量代数.此时取定 M 之基后($\bigotimes M$ 此时仍为域 K 上的线性空间)则得到$\bigotimes M$ 的基.考虑$\bigotimes M$ 中元素在此基下的坐标,即得通常使用的张量及张量演算公式.同时,可以不困难地由$\bigotimes M$ 得到两个商代数——**外代数**(exterior algebra)与**对称代数**(symmetric algebra).前者可用于行列式理论的公理化处理,后者则概括了

多元多项式代数,欲知其详的读者可参看[G,78].

值得注意的是定义 7 不能照搬到 R 为非交换环的情形. 主要困难是:对 $f\in \mathrm{BL}(A,B;T)$, $r_1,r_2\in R$, $a\in A$, $b\in B$,

$$\begin{array}{ccc} f(r_1a,r_2b) & \xlongequal[\text{先提出 } r_1]{} & r_1f(a,r_2b)=r_1r_2f(a,b) \\ \Big\|\,{\scriptstyle 先提出 r_2} & & \\ r_2f(r_1a,b)=r_2r_1f(a,b) & & \end{array}$$

因此常导致 f 的平凡性($f\equiv 0$). 比如 R 为除环(体)但非域时,必有 $r_1,r_2\in R$ 使 $r_1r_2\neq r_2r_1$,因此 $r_1r_2-r_2r_1\neq 0$ 必有逆元在 R 中. 由 a,b 的任意性知必有 $f\equiv 0$,据此定义所得平凡,毫无用途. 由此可见,要想推广上述定义,R 的任意元不能随意由 f 中提出来. 这是推广中的困难所在.

解决这个困难的办法有两个,虽然都是退而求其次的,但仍有广泛的应用.

一个办法是,注意到任何环 R 都是某一交换环 K(比如取 $K=\mathbb{Z}$ 或 $K=C(R)$(R 的中心))上的代数,当然 $R\in {}_K\mathfrak{M}$,因此 $R\underset{K}{\otimes}R\in {}_K\mathfrak{M}$(由定义 7). 定义其乘法为

$$(r_1\otimes r_2)(r_3\otimes r_4)=r_1r_3\otimes r_2r_4,\quad \forall\, r_j\in R, j=1,2,3,4$$

则 $R\underset{K}{\otimes}R$ 为一个 K - 代数,当然更是一个环. 对两个左 R - 模 A, B(当然都是 K - 模)先定义它们的 K - 模张量积 $A\underset{K}{\otimes}B$. 再通过定义运算:

$$(r_1\otimes r_2)(a\otimes b)=r_1a\otimes r_2b, \forall\, a\in A, b\in B, r_1 r_2\in R,$$

使 $A\underset{K}{\otimes}B\in {}_{R\underset{K}{\otimes}R}\mathfrak{M}$. 当 R 为交换环时取 $K=R$ 知此时所得与定义 7 所定义的是一致的. 对两个非交换环 R,S,因必有公共的交换环 K(比如 $K=\mathbb{Z}$)使 R,S 都是 K - 代数,仿上述办法(将 $R\underset{K}{\otimes}R$ 改为 $R\underset{K}{\otimes}S$)还可将 $A\underset{K}{\otimes}B$ 定义成一个 $R\underset{K}{\otimes}S$ - 模. 对此也可用泛性质办法搞出一套完美理论. 参看[周,79]、[周,81]与[周,82]等.

另一个办法是利用下面定义的双加平衡映射取代定义 7 中的双线性映射,用其泛性质将一右一左的两个 R - 模 A_R, ${}_RB$ 的张量积 $A\underset{R}{\otimes}B$ 定义为一个 Abel 群(即 $\mathbb{Z}$ - 模). 虽然结构少了,但仍有广泛的应用. 在本书中也是用得最多的工具之一.

定义 8　设 R 为环, $A\in\mathfrak{M}_R$, $B\in{}_R\mathfrak{M}$, $G\in\mathbb{A}\mathrm{G}$.

(Ⅰ) 若 $f:A\times B\to G$ 满足

(i) $f(a_1+a_2,b)=f(a_1,b)+f(a_2,b)$,

(ii) $f(a,b_1+b_2)=f(a,b_1)+f(a,b_2)$,　$\forall a,a_j\in A,b,b_j\in B$, 则称 f 为 A,B 到 G 的**双加映射**(biadditive mapping);

(Ⅱ) 若 $f:A\times B\to G$ 满足

(iii) $f(ar,b)=f(a,rb)$,　$\forall r\in R,a\in A,b\in B$,

(即对 f 的作用, r 在 a 的右侧与 b 的左侧之间可双向移动), 则称 f 为 A,B 到 G 的 R - **平衡映射**(R - balanced mapping);

(Ⅲ) 若 $f:A\times B\to G$ 同时满足上述的(i)、(ii)、(iii), 则称 f 为 A,B 到 G 的**双加** R - **平衡映射**, 并记为 $f\in\mathrm{Biab}(A,B;G)$.

显然可看出: 当 R 为交换环时, 双加 R - 平衡映射与 R - 双线性映射可不加区别.

有了这个定义, 我们可定义更一般的张量积.

定义 9　设 R 为环, $A\in\mathfrak{M}_R$, $B\in{}_R\mathfrak{M}$. 若 $T\in\mathbb{A}\mathrm{G}$ 与 $f\in\mathrm{Biab}(A,B;T)$ 满足如下的(双加 R - 平衡的)泛性质:

对任意的 $G\in\mathbb{A}\mathrm{G}$ 与任意的 $g\in\mathrm{Biab}(A,B;G)$, 都有唯一的群同态 h 使 $g=hf$, 即

$$\begin{array}{ccc} A\times B & \xrightarrow{\ f\ } & T \\ {\scriptstyle\forall g}\downarrow & \swarrow{\scriptstyle h\exists|} & \\ \forall G & & \end{array}$$

为交换图,则(T,f)或T称为A,B的**张量积**,记为$T=A\underset{R}{\otimes}B$,并记$f(a,b)=a\otimes b,\forall a\in A,b\in B$.因此也将$f$记成$\otimes$或$\underset{R}{\otimes}$.

我们提醒读者注意,在这个定义中是将右R-模A与左R-模B的张量积$A\underset{R}{\otimes}B$定义成一个由$\{a\otimes b\mid a\in A,b\in B\}$生成的Abel群($\mathbb{Z}$-模),且是一种使$R$的元素可在$a\otimes b$中从$a$的右边移到$b$的左边或作相反方向移动的Abel群,即

$$(ar)\otimes b=a\otimes(rb),\quad \forall r\in R,a\in A,b\in B$$

$A\underset{R}{\otimes}B$的元素均可表如

$$\sum_{<\infty}a_j\otimes b_j,\quad a_j\in A,b_j\in B \tag{1}$$

之形.但未必能表为$a\otimes b$的形式(能表成这种形式者称为可分解元素).定义7中给出的张量积$A\underset{R}{\otimes}B$(R为交换环)是一个R-模,虽然R的元素在其中有更大的自由性,即

$$(ra)\otimes b=a\otimes(rb)=r(a\otimes b),\quad \forall r\in R,a\in A,b\in B$$

但元素的表示形式也是(1)的那种样子,未必能表为$a\otimes b,a\in A,b\in B$之形.这是张量积研究中的一个主要的困难.

现在我们给出定义9中定义的张量积的存在性与唯一性.

定理7 设R为环,$A\in\mathfrak{M}_R,B\in{}_R\mathfrak{M}$.则$A\underset{R}{\otimes}B\in\mathbb{A}\mathrm{G}$存在且在群同构的意义下是唯一的.

证 存在性:将定理6关于存在性之证中的自由R-模F改为以$A\times B$作基的自由Abel群($\mathbb{Z}$-模),其子模S改为子群

$$S=<\{(a_1+a_2,b)-(a_1,b)-(a_2,b),(a,b_1+b_2)-(a,b_1)-(a,b_2),$$
$$(ar,b)-(a,rb)\mid a,a_j\in A,b,b_j\in B,r\in R\}>$$

验证F/S满足定义9即可.

唯一性:仿定理6前段的办法(将那里的$g\in\mathrm{BL}(A,B;M)$改为$g\in\mathrm{Biab}(A,B;M),M\in{}_R\mathfrak{M}$改为$M\in\mathbb{A}\mathrm{G}$).得范畴$\mathbb{T}$.$A$与$B$的张量积即$\mathbb{T}$的始对象.因此在同构意义下是唯一的(读者也可给

出一种直接的证法). □

注 1 对交换环 R,R－双线性映射必为双加的,但反过来未必.

例 4 取 $A=B=\mathbb{Z}$,$R=\mathbb{Z}+\mathbb{Z}x$,$x^2=1$(即 $R\simeq\mathbb{Z}[x]/(x^2-1)$),$T=\mathbb{Z}$.用

$$(m+nx)a=(m-n)a,\quad \forall m,n\in\mathbb{Z},a\in A=B$$

给出 A,B 的 R－模结构(乘法).用

$$(m+nx)t=(m+n)t,\quad \forall m,n\in\mathbb{Z},t\in T$$

给出 T 的 R－模结构(乘法).定义

$$f: A\times B\to T$$

$$f(a,b)=ab,\quad \forall a\in A,b\in B$$

则 f 为双加映射但非 R－双线性映射.事实上,

$$(m+nx)f(a,b)=(m+nx)ab=(m+n)ab$$

而

$$f((m+nx)a,b)=f((m-n)a,b)=(m-n)ab$$

二者一般地是不相等的.

从这个有趣的例子还可看出:对同一个加法 Abel 群,可给出不同的 R－模结构,从而得到不同的 R－模.这一点,今后宜当心.

下面我们说明:对非交换环 R,定义 9 给出的张量积在一些特殊(但也是重要的)情况下仍能具有 R－模结构,或其他的环模结构.

命题 2 设 R,S 为环,$B\in{}_R\mathfrak{M}_S$(即 B 为 $R-S$ 双模),$A\in\mathfrak{M}_R$,定义 $A\underset{R}{\otimes}B$ 的右 S－模运算为

$$(a\otimes b)s=a\otimes(bs),\quad \forall a\in A,b\in B,s\in S$$

则 $A\underset{R}{\otimes}B\in\mathfrak{M}_S$;

若 $A\in{}_S\mathfrak{M}_R$,$B\in{}_R\mathfrak{M}$,定义 $A\underset{R}{\otimes}B$ 的左 S－模运算为

$$s(a\otimes b)=(sa)\otimes b,\quad \forall a\in A, b\in B, s\in S$$

则 $A\underset{R}{\otimes}B\in {}_S\mathfrak{M}$. □

证 直接验证.

推论 1 设 R 为交换环, S 为 R − 代数, $B\in {}_R\mathfrak{M}$, $S\underset{R}{\otimes}B\in {}_S\mathfrak{M}$, $B\underset{R}{\otimes}S\in \mathfrak{M}_S$.

证 注意 $S\in {}_S\mathfrak{M}_R$ 且 $S\in {}_R\mathfrak{M}_S$, $B\in {}_R\mathfrak{M}$ 且 $B\in \mathfrak{M}_R$, 即由命题 2 知结论成立. □

下面给出交换环上环模张量积在同构意义下的交换性, 以及一般环上环模张量积在同构意义下的结合性. 先给出结合性.

定理 8 设 R, S 为环, $A\in \mathfrak{M}_R$, $B\in {}_R\mathfrak{M}_S$, $C\in {}_S\mathfrak{M}$, 则有 Abel 群同构:

$$(A\underset{R}{\otimes}B)\underset{S}{\otimes}C\underset{\mathbb{AG}}{\simeq}A\underset{R}{\otimes}(B\underset{S}{\otimes}C)$$

且当 $A\in {}_T\mathfrak{M}_R$ 时为左 T − 模同构, 当 $C\in {}_S\mathfrak{M}_T$ 时为右 T − 模同构, 其中 T 为任一环.

证 定义三加 R − 平衡映射

$$f: A\times B\times C\longrightarrow G\in \mathbb{A}G$$

即 f 对 A, B, C 都是加性的(保持加法对应)且

$$f(ar, b, c)=f(a, rb, c)$$

$$f(a, bs, c)=f(a, b, sc),\quad \forall a\in A, b\in B, c\in C, r\in R, s\in S$$

仿前给出泛性质及相应的范畴 $\mathbb{T}$, 说明欲证的同构之两端都是 $\mathbb{T}$ 中的始对象即可. "且当…"部分由命题 2 即知. □

定理 9 设 R 为任一环, $A\in \mathfrak{M}_R$, $B\in {}_R\mathfrak{M}$, 则

(i) 按定义 9 给出的 $A\underset{R}{\otimes}B$ 在 R 为交换环时也有定义 7 给出的 R − 模结构;

(ii) $R\underset{R}{\otimes}B\simeq B$(作为左 R − 模),

$A\underset{R}{\otimes}R\simeq A$(作为右 R − 模).

证(i)注意 R 为交换环时, $A, B\in {}_R\mathfrak{M}_R$. 此时双加 R − 平衡映

射与 R－双线性映射实质上是一回事即知.

(ii)令
$$r\otimes b \mapsto rb,\quad \forall r\in R, b\in B$$
可得第一个同构.而令
$$a\otimes r \mapsto ar,\quad \forall r\in R, a\in A$$
可得第二个同构(注意 $R\in {}_R\mathfrak{M}_R$!). □

定理 10 设 R 为交换环,$A,B\in {}_R\mathfrak{M}$,则有 R－模同构
$$A\underset{R}{\otimes}B\simeq B\underset{R}{\otimes}A$$

证 令 $a\otimes b\mapsto b\otimes a,\quad \forall a\in A, b\in B$

直接验证即得证. □

再来介绍函子$\otimes$.这个函子为模论与同调代数中最重要的两大函子之一,为介绍这个函子,先证明如下命题.

命题 3 设 R 为环,$f\in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{M}_R}(A,A')$,$g\in \mathrm{Hom}_{{}_R\mathfrak{M}}(B,B')$则有唯一的 $h\in \mathrm{Hom}_{AG}(A\underset{R}{\otimes}B, A'\underset{R}{\otimes}B')$使
$$h(a\otimes b)=f(a)\otimes g(b),\quad \forall a\in A, b\in B$$
记 $h=f\otimes g$,常称为 f 与 g 的张量积.

证 由
$$\sigma(a,b)=f(a)\otimes g(b),\quad \forall a\in A, b\in B$$
定义 $\sigma\in \mathrm{Biab}(A,B;A'\underset{R}{\otimes}B')$.由双加 R－平衡映射的泛性质知有唯一的 $h\in \mathrm{Hom}_{AG}(A\underset{R}{\otimes}B, A'\underset{R}{\otimes}B')$使下图成交换图:

$$\begin{array}{ccc} A\times B & \xrightarrow{\otimes} & A\underset{R}{\otimes}B \\ \sigma\downarrow & \swarrow{\scriptstyle h\exists!} & \\ A'\underset{R}{\otimes}B' & & \end{array}$$

由此即得欲证. □

命题 4 设 R 为环,$A,A',A''\in\mathfrak{M}_R$,$B,B',B''\in{}_R\mathfrak{M}$,且 $f\in\mathrm{Hom}_{\mathfrak{M}_R}(A,A')$,$f'\in\mathrm{Hom}_{\mathfrak{M}_R}(A',A'')$,$g\in\mathrm{Hom}_{{}_R\mathfrak{M}}(B,B')$,$g'\in\mathrm{Hom}_{{}_R\mathfrak{M}}(B',B'')$,则

$$(f'\otimes g')(f\otimes g)=f'f\otimes g'g$$

证 用命题 3,将欲证式的两边作用于 $a\otimes b$,$a\in A$,$b\in B$,即可得证. □

现在我们可以给出几种函子,统称为张量积函子.

设 R 为任意环. 任意取定 $A\in\mathfrak{M}_R$,定义

$$A\underset{R}{\otimes}-:B\longmapsto A\underset{R}{\otimes}B\in\mathbb{A}\mathrm{G},\ \forall B\in{}_R\mathfrak{M}$$

$$A\underset{R}{\otimes}-:f\longmapsto I_A\otimes f\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{A}\mathrm{G}}(A\underset{R}{\otimes}B,A\underset{R}{\otimes}B'),$$

$$\forall f\in\mathrm{Hom}_{{}_R\mathfrak{M}}(B,B')$$

容易验证 $A\underset{R}{\otimes}-:{}_R\mathfrak{M}\to\mathbb{A}\mathrm{G}$ 为加法共变函子.

类似地可给出另外几种张量积函子,于是有

定理 11 设 R,S 为任意环,则

(i) 任意的 $A\in\mathfrak{M}_R$ 都给出加法共变函子

$$A\underset{R}{\otimes}-:{}_R\mathfrak{M}\to\mathbb{A}\mathrm{G}$$

(ii) 任意的 $B\in{}_R\mathfrak{M}$ 都给出加法共变函子

$$-\underset{R}{\otimes}B:\mathfrak{M}_R\to\mathbb{A}\mathrm{G}$$

(iii) 任意的 $A\in{}_S\mathfrak{M}_R$ 都给出加法共变函子

$$A\underset{R}{\otimes}-:{}_R\mathfrak{M}\to{}_S\mathfrak{M}$$

(iv) 任意的 $B\in{}_R\mathfrak{M}_S$ 都给出加法共变函子

$$-\underset{R}{\otimes}B:\mathfrak{M}_R\to\mathfrak{M}_S$$

在 R 为交换环时,有

(v) 任意的 $A\in{}_R\mathfrak{M}$ 都给出加法共变函子

$$A\underset{R}{\otimes}-:{}_R\mathfrak{M}\to{}_R\mathfrak{M}$$

(vi) 任意的 $B\in {}_R\mathfrak{M}$ 都给出加法共变函子

$$-\underset{R}{\otimes}B: {}_R\mathfrak{M}\to {}_R\mathfrak{M}$$

证 用前述的定理 7,命题 2,命题 3,命题 4 及定理 6 即可得证. □

值得注意的是,上述的张量积函子一般地都不是忠实函子.为说明这点,只需考察下面的例子.其他的例子可仿此给出.

例 5 取环 $R=\mathbb{Z}$,$M=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\in {}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M}$. α 为嵌入同态

$$\mathbb{Z}\rightarrowtail\mathbb{Q}\in {}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M}$$

其中$\mathbb{Q}$为有理数加群.

由定理 9 知

$$M\underset{\mathbb{Z}}{\otimes}\mathbb{Z}\simeq M\neq 0$$

但对任意的 $m\in M$ 与 $q\in\mathbb{Q}$

$$m\otimes q=m\otimes(2q/2)=2m\otimes(q/2)=0\otimes(q/2)=0$$

因此

$$M\underset{\mathbb{Z}}{\otimes}\mathbb{Q}=0$$

由此知,虽然 $\alpha\neq 0$,但

$$M\underset{\mathbb{Z}}{\otimes}-:\ \alpha\mapsto I_M\otimes\alpha=0$$

故 $M\underset{\mathbb{Z}}{\otimes}-$不是忠实函子.

这个例子十分重要.它还说明函子⊗通常不保持单同态,甚至可能将单同态变成满同态、零同态.因此,通常也不能将子模变成取张量积后的子模.即,尽管 B 为 A 的 R - 子模(既使在 R 为交换环时),仍可能找到 R - 模 M 使$M\underset{R}{\otimes}B\neq 0$ 但 $M\underset{R}{\otimes}A=0$. 这个奇怪的现象的消除,就引起了下章中关于平坦模的研究.

建议读者对照张量积定义的泛性质,弄清楚为什么会发生这种奇怪的现象,并搞清楚 $M\underset{R}{\otimes}B$ 与$M\underset{R}{\otimes}A$ 中的张量积事实上不是同一运算.

作为本节的结束,利用上节的例 3,例 4 以及本节定义的双模

结构,将函子 Hom 的一些性质整理如下,其证明都是直接验证性的,这里不再赘述. 在下章 §3 中,我们还将介绍函子$\otimes$与函子 Hom 的重要伴随关系.

定理 12　设 R,S 为任意环,则

(i) 任意的 $A\in {}_R\mathfrak{M}$ 都给出加法共变函子

$$\mathrm{Hom}_R(A,-):{}_R\mathfrak{M}\to\mathbb{A}\mathrm{G}$$

(ii) 任意的 $B\in {}_R\mathfrak{M}$ 都给出加法反变函子

$$\mathrm{Hom}_R(-,B):{}_R\mathfrak{M}\to\mathbb{A}\mathrm{G}$$

(iii) 任意的 $A\in {}_R\mathfrak{M}_S$ 都给出加法共变函子

$$\mathrm{Hom}_R(A,-):{}_R\mathfrak{M}\to{}_S\mathfrak{M}$$

其中规定,sf 使 $sf(a)=f(as)$, $\forall f\in\mathrm{Hom}_R(A,B)$, $a\in A$, $s\in S$.

同时 $A\in {}_R\mathfrak{M}_S$ 也给出加法共变函子

$$\mathrm{Hom}_S(A,-):\mathfrak{M}_S\to\mathfrak{M}_R$$

其中规定 fr 使$(fr)(a)=f(ra)$, $\forall f\in\mathrm{Hom}_S(A,B)$, $a\in A$, $r\in R$;

(iv) 任意的 $B\in {}_S\mathfrak{M}_R$ 都给出加法反变函子

$$\mathrm{Hom}_R(-,B):\mathfrak{M}_R\to{}_S\mathfrak{M}$$

其中规定 sf 使$(sf)(a)=sf(a)$, $\forall f\in\mathrm{Hom}_R(A,B)$, $a\in A$, $A\in\mathfrak{M}_R$, $s\in S$.

同时,$B\in {}_S\mathfrak{M}_R$ 也给出加法反变函子

$$\mathrm{Hom}_S(-,B):{}_S\mathfrak{M}\to\mathfrak{M}_R$$

其中规定 fr 使$(fr)(a)=f(a)r$, $\forall f\in\mathrm{Hom}_S(A,B)$, $a\in A$, $A\in{}_S\mathfrak{M}$, $r\in R$.

当 R 为交换环时,任意的 $A\in {}_R\mathfrak{M}$ 都给出加法共变函子

$$\mathrm{Hom}_R(A,-):{}_R\mathfrak{M}\to{}_R\mathfrak{M}$$

任意的 $B\in {}_R\mathfrak{M}$ 都给出加法反变函子

$$\mathrm{Hom}_R(—,B):{}_R\mathfrak{M}\to{}_R\mathfrak{M}$$

总之，$\mathrm{Hom}_R(A,—)$为加法共变函子；$\mathrm{Hom}_R(—,B)$为加法反变函子.

定理 13 对任意的环 R 与$B\in{}_R\mathfrak{M}$，有左 R-模同构

$B\overset{f}{\simeq}\mathrm{Hom}_{_R\mathfrak{M}}(R,B)$，其中 $f(b)(r)=rb$，$\forall\, b\in B,r\in R$

对任意的环 R 与$B\in\mathfrak{M}_R$，有右 R-模同构

$B\overset{f}{\simeq}\mathrm{Hom}_{\mathfrak{M}_R}(R,B)$，其中 $f(b)(r)=br$，$\forall\, b\in B,r\in R$

证 用定理 12 给出的模结构直接验证. □

习 题 1.3

1. 设 X 为一个(非空的)拓扑空间，$C(X)$为 X 上的实连续函数环，$R=\mathrm{Hom}_{\mathbf{S}}(X,C(X))$. 试将 R 作成一个$C(X)$-模.

如果将 X 换成一个非空集合，$C(X)$换成任意环 S，你的作法是否仍有效?

2. 设 R 为任意环，$0\neq M\in{}_R\mathfrak{M}$. 若除去 0，$M$ 外 M 无其他左 R-子模，则称 M 为(左 R-)单模(simple module). 证明：M 为单模的充分必要条件是有 R 的极大左理想 A 使有左 R-模同构 $M\simeq R/A$. 并由此推知${}_R\mathfrak{M}$ 中必有单模存在.

3. (Schur 引理)设 R 为环，$M\in{}_R\mathfrak{M}$ 为单模，则 End_RM 即 $\mathrm{Hom}_R(M,M)$为除环. 试给出这一结论的证明.

4. 设 R 为任意环，L，I 分别为 R 的左，右理想. 证明：

(i) 对每一个 $M\in{}_R\mathfrak{M}$，都有$\mathbb{Z}$-模同构

$$f:R/I\underset{R}{\otimes}M\to M/IM$$

其中 $f:(r+I)\otimes m\mapsto rm+IM$，$\forall\, r\in R,m\in M$；

(ii) 用(i)证明必有$\mathbb{Z}$-模同构

$$R/I\underset{R}{\otimes}R/L\simeq R/(I+L)$$

当 R 为交换环时，这个$\mathbb{Z}$-模同构能否是 R-模同构?

5. 若 m，n 为正整数，$d=(m,n)$(即 d 为 m，n 的最大公约数). 证明必有$\mathbb{Z}$-模同构

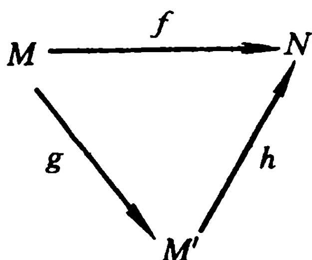
$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\underset{\mathbb{Z}}{\otimes}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\simeq\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}.$$

6. 设 $f:R\to S$ 为环同态. 证明每一个 $M\in{}_S\mathfrak{M}(\mathfrak{M}_S)$ 都有一个左 R－模(右 R－模)结构.

7. 直接验证左 R－模同态的两个因子分解定理:

(i) 设在${}_R\mathfrak{M}$ 中有同态 $f:M\to N$ 与 $g:M\to M'$, 其中 g 为满同态且 $\mathrm{Ker}g\subseteq\mathrm{Ker}f$. 则①必有唯一的左 R－模同态 $h:M'\to N$ 使 $f=hg$; ②$\mathrm{Ker}h=g(\mathrm{Ker}f)$, $\mathrm{Im}h=\mathrm{Im}f$; ③$h$ 单$\Leftrightarrow\mathrm{Ker}g=\mathrm{Ker}f$; ④$h$ 满$\Leftrightarrow f$ 满.

(ii) 设在${}_R\mathfrak{M}$ 中有同态 $f:M\to N$ 与 $h:M'\to N$, h 为单同态且 $\mathrm{Im}f\subseteq\mathrm{Im}h$. 则①必有唯一的同态 $g:M\to M'$ 使 $f=hg$; ②$\mathrm{Ker}g=\mathrm{Ker}f$, $\mathrm{Im}g=h^{-1}(\mathrm{Im}f)$; ③$g$ 单$\Leftrightarrow f$ 单; ④g 满$\Leftrightarrow\mathrm{Im}h=\mathrm{Im}f$.



§4　模正合列与图追踪法

本节的目的是讨论模正合列的性质并介绍今后常用的图追踪法. 本节的内容也适用于更广的范畴, 但我们感兴趣的是环模范畴, 因而只就${}_R\mathfrak{M}$ 进行讨论. 先介绍在拓扑学、代数几何等学科中也都常用的正合列概念.

定义 1　设 R 为任意环,

$$\cdots\longrightarrow M_{n+1}\xrightarrow{f_{n+1}}M_n\xrightarrow{f_n}M_{n-1}\xrightarrow{f_{n-1}}M_{n-2}\longrightarrow\cdots\qquad(1)$$

为${}_R\mathfrak{M}$ 中的同态(态射)列. 若

$$\mathrm{Im}f_{n+1}=\mathrm{Ker}f_n$$

则称此列在 M_n 处**正合**(exact). 当此列处处都正合, 即在 $j=\cdots,n+1,n,n-1,\cdots$时都在 M_j 处正合(对左端起于 M_i 或右端止于 M_i 的情况, 当然不计 M_i), 则称此列为左 R－模**正合列**(exact se-

quence).左(右)端起于 0(止于 0)的正合列有时又称为左(右)正合列.

对 $\mathfrak{M}_R$, ${}_R\mathfrak{M}_S$(S 也为环)等可类似地定义正合列的概念.

注 1 对上述正合列(1)当然必有 $f_jf_{j+1}=0$,即 $\mathrm{Im}f_{j+1}\subseteq \mathrm{Ker}f_j$, $j=\cdots,n+1,n,n-1,\cdots$. 如果不要求 $\mathrm{Im}f_{j+1}=\mathrm{Ker}f_j$,只要求 $f_jf_{j+1}=0$, $j=\cdots,n+1,n,n-1,\cdots$,则得到后面将要介绍的${}_R\mathfrak{M}$ 中的"复形"概念. 此时

$$\mathrm{Ker}f_j/\mathrm{Im}f_{j+1}$$

即称为此复形的(第 j 个或 j 维)同调模,$R=\mathbb{Z}$ 时又称为同调群. 复形与正合列有同等的重要性. 有兴趣的读者试着去证明"函子作用于正合列或复形必得到复形"对今后的学习将是有益的.

现在给出一些例子,以帮助我们理解正合列的概念. 从中也可看出:即使只看作一种简单的"语言",正合列也是有意义的.

例 1 在${}_R\mathfrak{M}$ 中,

$0\longrightarrow M'\xrightarrow{f}M$ 正合$\Leftrightarrow f$ 为单同态,常记为 $M'\overset{f}{\rightarrowtail}M$;

$M\xrightarrow{g}M''\longrightarrow 0$ 正合$\Leftrightarrow f$ 为满同态,常记为 $M\overset{g}{\twoheadrightarrow}M''$;

$0\longrightarrow M'\xrightarrow{f}M\longrightarrow 0$ 正合$\Leftrightarrow f$ 为同构,常记为 $M'\overset{f}{\rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow}M$;

$M'\overset{f}{\twoheadrightarrow}M\overset{g}{\rightarrowtail}M''$ 正合$\Leftrightarrow M=0\Leftrightarrow 0\longrightarrow M\longrightarrow 0$ 正合;

$M_1\xrightarrow{f_1}M_2\xrightarrow{f_2}M_3\xrightarrow{f_3}M_4$ 正合时,(i) f_1 为满同态$\Leftrightarrow f_3$ 为单同态$\Leftrightarrow f_2=0$;(ii) $f_1=0\Leftrightarrow f_2$ 为单同态;(iii) $f_3=0\Leftrightarrow f_2$ 为满同态.

定义 2 ${}_R\mathfrak{M}$ 中形如

$$0\longrightarrow M'\xrightarrow{i}M\xrightarrow{\pi}M''\longrightarrow 0 \tag{2}$$

的正合列又称为**短正合列**(short exact sequence),常记为

$$M'\overset{i}{\rightarrowtail}M\overset{\pi}{\twoheadrightarrow}M''$$

短正合列是最常用的正合列,在下章中我们将多次看到:"长"

正合列可看作是由短正合列逐次接起来的.短正合列也是定义群扩张与模扩张的基础.注意,上述的短正合列(2)显然等价于“$M' \simeq i(M') = \mathrm{Im}\, i$ 且 $M/\mathrm{Im}\, i \simeq M''$(即 $M/\mathrm{Ker}\,\pi \simeq \mathrm{Im}\,\pi$)”.

用正合列可将模(同态)的三条同构定理(见上节定理 1、定理 2 与定理 3)表述如下:

定理 1′ 设 $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$,则

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker} f \longrightarrow M \xrightarrow{f} \mathrm{Im} f \longrightarrow 0$$

为短正合列.

定理 2′ 设在 ${}_R\mathfrak{M}$ 中,$M_1, M_2 < M$,$\pi: M \twoheadrightarrow M/M_2$ 为标准同态,而 $f = \pi|_{M_1}$(π 在 M_1 上的限制),则

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker} f \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} \mathrm{Im} f \longrightarrow 0$$

为短正合列且

$$\mathrm{Im} f = (M_1 + M_2)/M_2$$
$$\mathrm{Ker} f = M_1 \cap M_2$$

定理 3′ 设在 ${}_R\mathfrak{M}$ 中 $M_2 < M_1 < M$,则

$$0 \to M_1/M_2 \to M/M_2 \to M/M_1 \to 0$$

为短正合列.

上节定理 5 也可用正合列表为:

定理 5′ 设 $M \in {}_R\mathfrak{M}$,则以下各点是等价的:

(i) M 为循环左 R-模;

(ii) 有 R 的左理想 I 使

$$0 \to I \to R \to M \to 0$$

为左 R-模短正合列;

(iii) 有左 R-模正合列

$$R \to M \to 0$$

(iv) 有左 R-模正合列

$$0 \longrightarrow l\mathrm{Ann}_R f(1) \longrightarrow R \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0$$

其中

$$l\mathrm{Ann}_R f(1)=\{r\in R \mid rf(1)=0\}$$

(称为 $f(1)\in M$ 在 R 中的左零化子),“1”表示 R 的单位元.

现在我们以下述命题的证法作例,介绍模论与同调代数中的一个基本方法——图追踪法,简称**图追踪**(diagram-chasing).即沿着图中箭头方向用正合性、交换性进行追踪,以构作同态(补图)或证明一些结论的方法.通俗地说,就是“按图索骥”、“按图发兵”.

命题1 对${}_R\mathfrak{M}$ 中下行正合、上行满足 $\pi i=0$ 的实箭头交换图(①为交换的)

$$\begin{array}{ccccccc} & & A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{\pi} & C \\ & & \Big\downarrow f & \text{②} & \Big\downarrow g & \text{①} & \Big\downarrow h \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{i'} & B' & \xrightarrow{\pi'} & C' \end{array}$$

必存在唯一的 $f\in\mathrm{Hom}_R(A,A')$ 使(包括虚箭头的)新图为交换图.

证 对任意的 $a\in A$ 作图追踪:

$$a \overset{i}{\longmapsto} i(a) \overset{g}{\longmapsto} gi(a)$$

(i) 若 $gi(a)\in \mathrm{Im}i'$,由 i'之单性(下行正合)知,必有唯一的 $a'\in A'$使

$$i'(a')=gi(a)$$

定义 $f:A\to A'$使 $f(a)=a'$,易看出 $f(0)=0$,因此 f 为完全确定的左 R-模同态,且使②是交换的,因此上图为交换图.

(ii) 若 $gi(a)\notin \mathrm{Im}i'$,由下行正合知 $\mathrm{Im}i'=\mathrm{Ker}\pi'$,于是 $\pi' gi(a)\neq 0$.但由①的交换性,由 A 到 C'的另一途径追踪应有

$$\pi' gi(a)=h\pi i(a)=0 \quad (\pi i=0)$$

这个矛盾说明(ii)不可能发生.于是命题证毕. □

由命题1显然有如下常用的推论.

推论 1　对${}_R\mathfrak{M}$中的行正合(即各行都是正合列)的交换图

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{\pi} & C \\ & & \Big\downarrow f & \text{②} & \Big\downarrow g & \text{①} & \Big\downarrow h \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{i'} & B' & \xrightarrow{\pi'} & C' \end{array}$$

必存在唯一的 $f\in \mathrm{Hom}_R(A,A')$使新图为交换图.

对偶地,我们可写出命题 1 的对偶命题如下,请读者务必认真地用图追踪给出证明.这对掌握图追踪法是很有益的.

命题 1°　对${}_R\mathfrak{M}$中下行正合、上行满足 $i\pi=0$ 的交换图

$$\begin{array}{ccccccc} & & A & \xleftarrow{i} & B & \xleftarrow{\pi} & C \\ & & \Big\uparrow f & & \Big\uparrow g & \text{①} & \Big\uparrow h \\ 0 & \longleftarrow & A' & \xleftarrow{i'} & B' & \xleftarrow{\pi'} & C' \end{array}$$

必有唯一的 $f\in \mathrm{Hom}_R(A',A)$使新图为交换图.

命题 1°也有如下常用的推论.

推论 1°　对${}_R\mathfrak{M}$中的行正合交换图

$$\begin{array}{ccccccc} C & \xrightarrow{\pi} & B & \xrightarrow{i} & A & \longrightarrow & 0 \\ \Big\uparrow h & \text{①} & \Big\uparrow g & & \Big\uparrow f & & \\ C' & \xrightarrow{\pi'} & B' & \xrightarrow{i'} & A' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

必有唯一的 $f\in \mathrm{Hom}_R(A',A)$ 使新图为交换图.

注 2 为了简单起见,作(上述)对偶翻译时,文字(对象,态射记号)上均不加圈或去圈,有时照习惯对图作适当的变动(如推论 1°中那样).今后对同一节中的对偶命题或对偶定理等,在编号时均作同一编号,但其中有一个在数码右上角加圈"°",以方便读者对照.对不能用对偶证法的也作这样的处理.对对偶定义也作如上的处理.对不同节中出现的对偶命题等,将尽可能地对后出现者加括号说明.

注 3 对有加法群结构的对象(如$\mathbb{G}$,$\mathbb{AG}$,${}_R\mathfrak{M}$,$\mathbb{R}\mathrm{ing}$ 中的对象)构作它们之间的态射(同态)f 时,要注意验证 $f(0)=0$.这样才能保证当一个元素有两种表示形式时,通过 f 必映到同一元素,即保证 f 的完全确定(well defined)性.这点对处理张量积之间的同态特别重要.因为一般地在 $A\underset{R}{\otimes}B$ 中,元素 x 表成$\sum\limits_{<\infty}a_j\otimes b_j$ 的形式可能是不唯一的.

注 4 我们可构作一个范畴${}_R\mathrm{Mor}$,使

$$\mathrm{Ob}_R\mathrm{Mor}=\{A\xrightarrow{f}A'\mid f\in \mathrm{Hom}_{{}_R\mathfrak{M}}(A,A')\}$$

$\mathrm{Hom}_{{}_R\mathrm{Mor}}(A\xrightarrow{f}A',\ B\xrightarrow{g}B')=\{(i,i')\mid$ 在${}_R\mathfrak{M}$ 中
$\begin{array}{ccc}A&\xrightarrow{i}&B\\ \downarrow f&&\downarrow g\\ A'&\xrightarrow{i'}&B'\end{array}$ 为交换图$\}$

${}_R\mathrm{Mor}$ 中态射合成由${}_R\mathfrak{M}$ 中态射合成给出.

在${}_R\mathrm{Mor}$ 中 $0\xrightarrow{0}0$ 是唯一的零对象.在不计同构的差别时,可以将${}_R\mathfrak{M}$ 中正合列 $0\longrightarrow K\longrightarrow A\xrightarrow{f}A'$ 中的K 认为是f 的核,也可将正合列 $A\xrightarrow{f}A'\longrightarrow C\longrightarrow 0$ 中的 C 认为是f 的上核.于是推论 1 中的 $A\xrightarrow{f}A'$ 可看成${}_R\mathrm{Mor}$ 中态射(π,π')的核,推论 1°中的$A'\xrightarrow{f}A$ 可看成${}_R\mathrm{Mor}$ 中态射(π',π)的上核.因此这两条推

论意味着：范畴$_R\mathbb{M}\mathrm{or}$中一切态射都有核与上核.对一般范畴中态射的核与上核，我们将在本章末节(§7)中介绍.

利用$_R\mathbb{M}\mathrm{or}$的构作法我们又可构作$_R\mathfrak{M}$上的短正合列范畴$_R\mathbb{SE}$，使

$\mathrm{Ob}_R\mathbb{SE}=\{_R\mathfrak{M}$中的短正合列$\}$

$$\mathrm{Hom}_{_R\mathbb{SE}}(0\longrightarrow A\xrightarrow{i}B\xrightarrow{\pi}C\longrightarrow 0,0\longrightarrow A'\xrightarrow{i'}B'\xrightarrow{\pi'}C'\longrightarrow 0)$$

$$=\left\{(f,g,h)\,\middle|\,\text{在}_R\mathfrak{M}\text{中}\begin{array}{ccccccccc}0&\longrightarrow&A&\xrightarrow{i}&B&\xrightarrow{\pi}&C&\longrightarrow&0\\&&f\downarrow&&g\downarrow&&h\downarrow&&\\0&\longrightarrow&A'&\xrightarrow{i'}&B'&\xrightarrow{\pi'}&C&\longrightarrow&0\end{array}\text{为行正合交换图}\right\}$$

$_R\mathbb{SE}$中态射合成由$_R\mathfrak{M}$中态射合成给出.

由注4，我们可将今后常用的短正合列分成同构(等价)类进行研究.为此，我们给出不用范畴语言的如下定义.

定义3　对$_R\mathfrak{M}$中行正合交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}0&\longrightarrow&A&\xrightarrow{i}&B&\xrightarrow{\pi}&C&\longrightarrow&0\\&&\Big\downarrow f&&\Big\downarrow g&&\Big\downarrow h&&\\0&\longrightarrow&A'&\xrightarrow{i'}&B'&\xrightarrow{\pi'}&C'&\longrightarrow&0\end{array}$$

若f,g,h都是左R-模同构，则称上图中上下两行所示的短正合列是**同构的**.

由此定义可得$_R\mathfrak{M}$中短正合列的等价分类(同构类).作为应用，我们给出如下定理.其中$A\oplus C$表示$_R\mathfrak{M}$中A,C的"直和"，它首先是Abel加群A,B的直和，即对加法运算

$$(a_1,c_1)+(a_2,c_2)=(a_1+a_2,c_1+c_2),\quad\forall a_j\in A,c_j\in C,j=1,2$$

再规定R-模运算(R乘)为

$$r(a,c)=(ra,rc),\quad \forall r\in R, a\in A, c\in C$$

所得的左 R-模. ${}_R\mathfrak{M}$ 中直和的一般定义将在本章§6中给出.

定理 1 设

$$0\longrightarrow A\xrightarrow{i}B\xrightarrow{\pi}C\longrightarrow 0 \tag{3}$$

为${}_R\mathfrak{M}$ 中的短正合列,则下述三点是等价的:

(i) 有左 R-模同态 $h:C\to B$ 使 $\pi h=I_C$(右可裂);

(ii) 有左 R-模同态 $k:B\to A$ 使 $ki=I_A$(左可裂);

(iii) 上述的短正合列(3)同构于短正合列

$$0\longrightarrow A\xrightarrow{i_1}A\oplus C\xrightarrow{\pi_2}C\longrightarrow 0$$

其中 $i_1(a)=(a,0)$, $\forall a\in A$, $\pi_2(a,c)=c$, $\forall a\in A, c\in C$,因此 $B\simeq A\oplus C$.

定义 4 在短正合列(3)满足定理 1 中(i)、(ii)、(iii)之一时,称(3)为**可裂的**(split).

定理 1 指出:对短正合列,可裂、左可裂、右可裂都是等价概念.

为证定理 1,先证今后常用(其他一些相关学科也常用到)的"五引理".

定理 2(五引理) 设有${}_R\mathfrak{M}$ 中的行正合交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
A_1 & \xrightarrow{f_1} & A_2 & \xrightarrow{f_2} & A_3 & \xrightarrow{f_3} & A_4 & \xrightarrow{f_4} & A_5 \\
\downarrow{\scriptstyle t_1} & & \downarrow{\scriptstyle t_2} & \textcircled{2} & \downarrow{\scriptstyle t_3} & \textcircled{3} & \downarrow{\scriptstyle t_4} & \textcircled{4} & \downarrow{\scriptstyle t_5} \\
B_1 & \xrightarrow{g_1} & B_2 & \xrightarrow{g_2} & B_3 & \xrightarrow{g_3} & B_4 & \xrightarrow{g_4} & B_5
\end{array}$$

则

(i) t_2、t_4 为满同态且 t_5 为单同态时,t_3 为满同态;

(i)° t_2、t_4 为单同态且 t_1 为满同态时,t_3 为单同态;

(ii) t_1、t_2、t_4、t_5 都是同构时，t_3 也为同构.

证　为便于看出图追踪的优点，在下面(及以后有些地方)的推证中使用记号"$\Rightarrow$"意指前者可推出后者. 必要时在"$\Rightarrow$"下方简注理由.

显然，(i)与(i)°$\Rightarrow$(ii)，且(i)°之证可用与(i)之证类似的图追踪法证出. 因此这里只需证(i). 用图追踪法. 下面出现的 $a_j\in A_j$，$b_j\in B_j$ 等不再注明.

$$\forall b_3\in B_3 \underset{\substack{g_3(b_3)\in B_4\\ t_4\text{满}}}{\Longrightarrow} \exists a_4 \text{ 使 } t_4(a_4)=g_3(b_3) \underset{\text{④可换}}{\Longrightarrow} t_5f_4(a_4)=g_4t_4(a_4)$$

$$\underset{\text{上步}}{=\!=} g_4g_3(b_3) \underset{B_4\text{处正合}}{=\!=\!=} 0 \underset{t_5\text{单}}{\Longrightarrow} f_4(a_4)=0 \Rightarrow a_4\in \operatorname{Ker}f_4 \underset{A_4\text{处正合}}{=\!=\!=}$$

$$\operatorname{Im}f_3 \Rightarrow \exists a_3 \text{ 使 } a_4=f_3(a_3) \Rightarrow g_3t_3(a_3) \underset{\text{③可换}}{=\!=} t_4f_3(a_3) \underset{\text{上步}}{=\!=}$$

$$t_4(a_4) \underset{a_4\text{条件}}{=\!=} g_3(b_3) \Rightarrow b_3-t_3(a_3)\in \operatorname{Ker}g_3 \underset{\text{正合}}{=\!=} \operatorname{Img}_2 \Rightarrow \exists b_2 \text{ 使}$$

$$g_2(b_2)=b_3-t_3(a_3) \underset{t_2\text{满}}{\Longrightarrow} \exists a_2 \text{ 使 } t_2(a_2)=b_2 \underset{\text{②可换}}{\Longrightarrow} t_3f_2(a_2)=$$

$$g_2t_2(a_2) \underset{\text{上步}}{=\!=} g_2(b_2) \underset{b_2\text{条件}}{=\!=} b_3-t_3(a_3) \Rightarrow b_3=t_3(f_2(a_2)+a_3)$$

$$\underset{b_3\text{任意}}{\Longrightarrow} t_3 \text{ 满}.$$

□

建议读者分析一下上述证明(或另用不同的方法)看看只对(i)而言，定理 2 中的条件是否可以减弱？

作为定理 2 的直接推论(令 $A_1=B_1=A_5=B_5=0$，注意 t_1，$t_5:0\to 0$ 既是单同态，也是满同态)立得

推论 2(三引理，也称短五引理)　设有 ${}_R\mathfrak{M}$ 中的行正合交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{\pi} & C & \longrightarrow & 0\\
 & & \downarrow{\scriptstyle t_2} & & \downarrow{\scriptstyle t_3} & & \downarrow{\scriptstyle t_4} & & \\
0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{i'} & B' & \xrightarrow{\pi'} & C' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

则

(i) t_2、t_4 为满同态时,t_3 为满同态;

(i)° t_2、t_4 为单同态时,t_3 为单同态;

(ii) t_2、t_4 为同构时,t_3 为同构.

推论 3(短五引理) 设有$_R\mathfrak{M}$ 中的行正合交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{\pi} & C & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle t_2} & & \downarrow{\scriptstyle t_3} & & \downarrow{\scriptstyle t_4} & & \\
0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{i'} & B' & \xrightarrow{\pi'} & C' & &
\end{array}$$

则推论 2 中的(i)、(i)°与(ii)仍成立.

证 仿定理 2 之证的分析知,只需证(i).

设 t_2,t_4 为满同态. 由 t_4 满、π 满知 $t_4\pi$ 满. 由上图可换知 $\pi' t_3$满,因此 π'满. 于是下行可补上 $C'\to 0$ 成短正合列. 由此知,可补上 $t_5:0\to 0$ 使新图仍为行正合交换图. 注意 t_5 当然是单的,故由定理 2 中(i)的证明即知 t_3 为满同态. □

下面来证明定理 1.

(i)⇒(iii):只需证下图中可给出左 R-模同态 φ 使新图可换,由三引理(推论 2)即得证.

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i_1} & A\otimes C & \xrightarrow{\pi_2} & C & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle I_A} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \downarrow{\scriptstyle I_C} & & \\
0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow[i]{} & B & \xrightarrow[\pi]{} & C & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

(图中的同态 i_1、π_2 分别由 $i_1(a)=(a,0)$, $\forall a\in A$,与 $\pi_2(a,c)=c$, $\forall a\in A, c\in C$ 定义).

事实上,由

$$\varphi((a,c))=i(a)+h(c),\quad \forall a\in A,c\in C$$

定义映射 $\varphi: A\oplus C\to B$,容易看出这是完全确定的映射(因为 $\varphi((0,0))=0$)且为左 R-模同态.新图的交换性也是不难直接验证的.由推论 2 知 φ 又为同构.

(ii)⇒(iii):类似地,只需在下图中给出左 R-模同态 ψ 使新图可换.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i_1} & A\oplus C & \xrightarrow{\pi_2} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow I_A & & \uparrow \psi & & \uparrow I_C & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{\pi} & C & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

事实上,令

$$\psi(b)=(k(b),\pi(b)),\quad \forall b\in B$$

容易看出 ψ 是完全确定的左R-模同构且使新图为交换图.

(iii)⇒(i)、(ii):在下图中 i_1,π_2 为已知同态,φ 为两短正合列同构给出的同构.再定义两个左 R-模同态

$$i_2: C\to A\oplus C$$

$$\pi_1: A\oplus C\to A$$

分别使 $i_2(c)=(0,c)$, $\forall c\in C$, $\pi_1((a,c))=a$, $\forall a\in A, c\in C$.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \underset{\pi_1}{\overset{i_1}{\rightleftarrows}} & A\oplus C & \underset{i_2}{\overset{\pi_2}{\rightleftarrows}} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow I_A & \nwarrow k=\pi_1\varphi^{-1} & \varphi^{-1}\uparrow\downarrow\varphi & h=\varphi i_2 \swarrow & \downarrow I_C & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{\pi} & C & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

取 $h=\varphi i_2$, $k=\pi_1\varphi^{-1}$后,容易验证

$$\pi h = \pi\varphi i_2 = \pi_2 i_2 = I_C$$

$$ki = \pi_1\varphi^{-1}i = \pi_1\varphi^{-1}iI_A = \pi_1 i_1 = I_A$$

这就证出了(i)、(ii). □

在结束本节时,我们指出:短正合列刻画了商模,可裂短正合列刻画了两项直和.这是由本节不难看出的.

习 题 1.4

1. 设 $f\in \mathrm{Hom}_R(M,N)$,证明:必有正合列

$$0\longrightarrow \mathrm{Ker}f\longrightarrow M\xrightarrow{f}N\longrightarrow \mathrm{Coker}f\longrightarrow 0$$

2. 设 M 为左 R - 模.证明下述各点是等价的:

(i) M 为单模(定义见习题 1.3);

(ii) 对一切 $f\in \mathrm{Hom}_R(M,N)$, $0\longrightarrow M\xrightarrow{f}N$ 为正合列;

(ii)° 对一切 $g\in \mathrm{Hom}_R(N,M)$, $N\xrightarrow{g}M\longrightarrow 0$ 为正合列.

3. (i) 设 M 为有限的循环$\mathbb{Z}$ - 模(即有限循环加法群).证明:必有$\mathbb{Z}$ - 模的短正合列

$$0\rightarrow\mathbb{Z}\rightarrow\mathbb{Z}\rightarrow M\rightarrow 0$$

(ii) 证明:必有$\mathbb{Z}$ - 模正合列

$$0\rightarrow\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\rightarrow\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\rightarrow\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\rightarrow\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\rightarrow 0$$

(iii) 证明:必有无穷的$\mathbb{Z}$ - 模正合列

$$\cdots\rightarrow\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\rightarrow\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\rightarrow\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\rightarrow\cdots$$

4. 设 V_j 为实线性空间, $\dim_{\mathbb{R}} V_j = j$, $j=1,2,3$.

(i) 给出两个实线性空间同态 f、g 使

$$0\longrightarrow V_1\xrightarrow{g}V_3\xrightarrow{f}V_2\longrightarrow 0$$

在 V_1、V_2 处正合,但在 V_3 处不正合;

(ii) 对(i)中给出的 f,给出实线性空间同态 g' 使

$$0\longrightarrow V_1\xrightarrow{g'}V_3\xrightarrow{f}V_2\longrightarrow 0$$

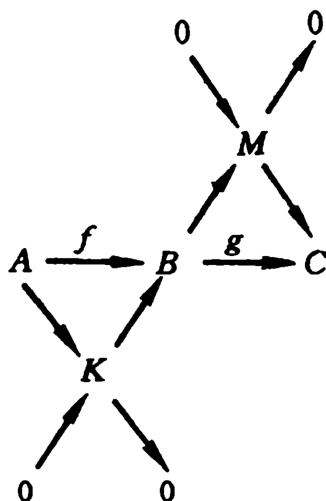
为正合列;

(iii) 对(i)中给出的 g,给出实线性空间的同态 f' 使

$$0 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{g} V_3 \xrightarrow{f} V_2 \longrightarrow 0$$

为正合列.

5. 设 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ 为左 R－模同态列. 证明:此列为正合列的充分必要条件是有左 R－模同态的交换图



其中含“0”的列都是正合的.

6. 证明对推论 2 中的行正合交换图,如果 t_3 是同构,则

(i) t_2 为单同态的充分必要条件是 t_4 为满同态;

(i)° t_2 为满同态的充分必要条件是 t_3 为单同态.

§5　函子 Hom 与⊗的正合性

在本节中我们讨论的范畴都是模范畴,可以是同一环上的左(右)模范畴,也可以是不同环上的左(右)模范畴.虽然,Hom 与⊗及本节论述的正合性也可推广到其他一些范畴,但这些推广都是照搬式的.因此为易于读者接受,我们这里论及的函子都是模范畴 $\mathscr{C},\mathscr{D}$ 间的加法函子.事实上,我们感兴趣的函子 Hom 与⊗都是加法函子.

先给出如下定义.

定义 1　设 $\mathscr{C},\mathscr{D}$ 为模范畴,$F:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ 为共变加法函子.

(i) 若对 $\mathscr{C}$ 中的任一正合列

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \tag{1}$$

$$0 — FA \xrightarrow{F\alpha} FB \xrightarrow{F\beta} FC \tag{1)'$$

在 $\mathscr{D}$ 中都是正合列，则称 F 为**左正合的**(left exact)；

(i)° 若对 $\mathscr{C}$ 中的任一正合列

$$C \xrightarrow{\beta} B \xrightarrow{\alpha} A \longrightarrow 0 \tag{2}$$

$$FC \xrightarrow{F\beta} FB \xrightarrow{F\alpha} FA \longrightarrow 0 \tag{2)'$$

在 $\mathscr{D}$ 中都是正合列，则称 F 为**右正合的**(right exact)；

(ii) 如果 F 同时是左正合的与右正合的，则称 F 为**正合的**(exact).

定义 1°(部分地对偶于定义 1) 设 $\mathscr{C},\mathscr{D}$ 为模范畴，$F:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ 为反变加法函子，

(i) 若对 $\mathscr{C}$ 中的任一正合列(2)，$\mathscr{D}$ 中的(1)′都是正合列，则称 F 为左正合的；

(i)° 若对 $\mathscr{C}$ 中的任一正合列(1)，$\mathscr{D}$ 中的(2)′都是正合列，则称 F **为右正合的**；

(ii) 如果 F 同时为左正合的与右正合的，则称 F 为**正合的**.

左、右正合列(1)、(2)常常被统称为**半正合列**，左、右正合(共变、反变)函子也常常被统称为半正合函子.

注 1 上述定义中，"F 为加法(共变、反变)函子"中的"加法"条件可以省去，所得定义仍是等价的. 在本章§7 中我们将证明这一点. 此外，我们提醒读者注意：上面对反变函子左(右)正合的定义是按该函子变出的正合列是左(右)正合列(即"0"出现在左(右)方)而命名的.

从上述定义立得如下结果.

命题 1 定义 1、定义 1°中的(1)、(2)统一地代之以短正合列

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0 \tag{3}$$

所得的定义分别与定义 1、定义 1°等价.

命题 2 设$\mathscr{C}$、$\mathscr{D}$都是模范畴.

(i) 若 $F:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ 为共变加法函子,则

F 左正合$\Leftrightarrow F$ 保持核,即,对 $\mathscr{C}$ 中任一同态 β, $F(\mathrm{Ker}\beta)\simeq \mathrm{Ker}F\beta$;

F 右正合$\Leftrightarrow F$ 保持上核.即,对 $\mathscr{C}$ 中任一同态 β, $F(\mathrm{Coker}\beta)\simeq\mathrm{Coker}F\beta$;

F 正合$\Leftrightarrow F$ 保持核与上核$\Leftrightarrow F$ 保持短正合列$\Leftrightarrow F$ 保持正合列.

(i)° 若 $F:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ 为反变加法函子,则

F 左正合$\Leftrightarrow F$ 变上核为核.即,对 $\mathscr{C}$ 中任一同态 β, $F(\mathrm{Coker}\beta)\simeq\mathrm{Ker}F\beta$;

F 右正合$\Leftrightarrow F$ 变核为上核.即,对 $\mathscr{C}$ 中任一同态 β, $F(\mathrm{Ker}\beta)\simeq\mathrm{Coker}F\beta$;

F 正合$\Leftrightarrow F$ 变核为上核且变上核为核$\Leftrightarrow F$ 将 $\mathscr{C}$ 中短正合列箭头倒转地变成 $\mathscr{D}$ 中相应的短正合列$\Leftrightarrow F$ 将 $\mathscr{C}$ 中正合列箭头倒转地变成 $\mathscr{D}$ 中相应的正合列.

下面先来讨论函子 Hom 的正合性.由本章§2 的例 3、例 4 与定义 4 可知,对模范畴(如${}_R\mathfrak{M}$、$\mathfrak{M}_R$ 等)$\mathrm{Hom}(M,-)$为共变加法函子,而 $\mathrm{Hom}(-,N)$则为反变加法函子.现在,我们来证明如下的更进一步的结果.

定理 1 对模范畴,

(i) $\mathrm{Hom}(M,-)$为左正合共变函子;

(i)° $\mathrm{Hom}(-,N)$为左正合反变函子.

证 只需证(i),(i)°的证明大体上可仿照(i)的证明.

为证(i),只需对任意的模正合列(因本定理适用于许多情况,为简单起见,不再标示环以及左、右模范畴)

$$0\longrightarrow A\xrightarrow{\alpha}B\xrightarrow{\beta}C\longrightarrow 0 \tag{3}$$

都有正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(M,A) \xrightarrow{\alpha_*} \mathrm{Hom}(M,B) \xrightarrow{\beta_*} \mathrm{Hom}(M,C)$$

其中

$$\alpha_* = \mathrm{Hom}(M,—)(\alpha): \sigma \mapsto \alpha\sigma, \quad \forall \sigma \in \mathrm{Hom}(M,A)$$

$$\beta_* = \mathrm{Hom}(M,—)(\beta): \tau \mapsto \beta\tau, \quad \forall \tau \in \mathrm{Hom}(M,B)$$

下面分三步来证.

(a) α_* 单:即设 $\alpha_*(\sigma) \equiv \alpha\sigma = 0$ 来证 $\sigma = 0$.

事实上,$\alpha\sigma = 0 \Rightarrow \alpha\sigma(M) = 0 \underset{\alpha单}{\Longrightarrow} \sigma(M) = 0 \Rightarrow \sigma = 0$, $\forall \sigma \in \mathrm{Hom}(M,A)$.

(b) $\mathrm{Im}\alpha_* \subseteq \mathrm{Ker}\beta_*$:即证 $\beta_*\alpha_* = 0$.

事实上,由 $\beta_*\alpha_* = (\beta\alpha)_* = 0_* = 0$ 即知.建议读者用图追踪法重新证明这一部分.

(c) $\mathrm{Ker}\beta_* \subseteq \mathrm{Im}\alpha_*$:用图追踪法.

注意 $\forall \tau \in \mathrm{Ker}\beta_*$,即 $\beta_*(\tau) = \beta\tau = 0$,只需证 $\exists \sigma \in \mathrm{Hom}(M,A)$ 使 $\tau = \alpha_*(\sigma) = \alpha\sigma$.为此只需证对 M 的任意元 m 有 $\tau(m) = \alpha\sigma(m)$.

$\forall m \in M \underset{\beta\tau=0}{\Longrightarrow} \beta\tau(m) = 0 \Rightarrow \tau(m) \in \mathrm{Ker}\beta \underset{(3)正合}{=\!=} \mathrm{Im}\alpha \underset{\alpha单}{\Longrightarrow} \exists |\, a \in A$ 使 $\alpha(a) = \tau(m) \Rightarrow$ 可定义 $\sigma: M \to A$ 使 $\sigma(m) = a \Rightarrow \alpha\sigma(m) = \alpha(a) = \tau(m)$. □

作为定理 1 的直接推论,我们得

推论 1 设 K 为域,则

$$* = \mathrm{Hom}_K(—,K): \mathbb{L}\mathrm{S}_K \to \mathbb{L}\mathrm{S}_K$$

为左正合反变(加法)函子,其中$\mathbb{L}\mathrm{S}_K$ 表 K 上的线性空间范畴.

推论 2 设 R 为任意环,则

$$* = \mathrm{Hom}_R(—,R): {}_R\mathfrak{M}(\mathfrak{M}_R) \to \mathfrak{M}_R({}_R\mathfrak{M})$$

为左正合反变(加法)函子.

注 2 以后将会看出,当 K 为域(甚至更广的环类,如 Artin 半单环)时 $* = \mathrm{Hom}_K(—,K)$,或更一般地,$\mathrm{Hom}_K(—,L)(L \in$

$\mathbb{L}S_K$)都是正合反变函子. 但对一般的环 R, $\mathrm{Hom}_R(M,—)$, $\mathrm{Hom}_R(—,N)$都未必为右正合(正合)的. 见下面二例即知.

例 1 令 $R=\mathbb{Z}$, $M=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}=\{\bar{0},\bar{1}\}$, 考察${}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M}$中的正合列

$$0\longrightarrow\mathbb{Z}\xrightarrow{\alpha}\mathbb{Q}\xrightarrow{\beta}\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\longrightarrow 0$$

其中$\mathbb{Q}$表有理数加群(作为$\mathbb{Z}$-模). 我们来证: $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,\mathbb{Q})=0$, 但 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\neq 0$. 由此即知 β_* 非满, 因此, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,—)$非右正合.

事实上, $\forall f\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,\mathbb{Q})$, 令 $f(\bar{1})=q$, 则

$$\left.\begin{array}{c} f(2\cdot\bar{1})=2f(\bar{1})=2q \\ \| \\ f(\bar{0})=0 \end{array}\right\} \xrightarrow[q\in\mathbb{Q}]{} q=0$$

由 f 的任意性即知 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,\mathbb{Q})=0$.

作 $f\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$使 $f(\bar{1})=\frac{1}{2}+\mathbb{Z}$ (注意 $f(\bar{0})=f(2\cdot\bar{1})=2f(\bar{1})=1+\mathbb{Z}=\mathbb{Z}$, 即 $f(\bar{0})=0$, 这是一个完全确定的同态), 则 $f\neq 0$. 于是 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\neq 0$.

例 2 对例 1 中的 $R=\mathbb{Z}$ 与正合列, 取 $N=\mathbb{Z}$, 则 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Z})=0$ 但 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},\mathbb{Z})\simeq\mathbb{Z}\neq 0$. 因此, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(—,N)$非右正合.

事实上, $\forall f\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Z})$, 记 $f(\frac{m}{n})=z$, $(m,n)=1$, $f(1)=z_1$, 则

$$\begin{array}{l} f(m)=mf(1)=mz_1 \\ \| \\ f(n\cdot\frac{m}{n})=nf(\frac{m}{n})=nz, \quad \forall\, 0\neq n\in\mathbb{Z} \end{array}$$

由$(m,n)=1$ 知 $n\mid z_1$ 对无穷多个 $n\in\mathbb{Z}$ 都成立, 因此 $z_1=0$. 但由上知 $mz_1=nz$, 于是 $z=0$. 由此知 $f=0$, 从 f 的任意性知 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Z})=0$.

由上面二例知, 研究对什么样的模 $M(N)$ 才能使

$\mathrm{Hom}(M,-)(\mathrm{Hom}(-,N))$右正合，也就是使 $\mathrm{Hom}(M,-)(\mathrm{Hom}(-,N))$正合，是有重要意义的. 以后我们将看到这正好分别是 M 为投射模以及 N 为内射模的特征性质.

下面来讨论函子⊗(张量积函子)的正合性. 我们来证明如下结果.

定理 2 设 R 为任意环, $M\in\mathfrak{M}_R$, $N\in{}_R\mathfrak{M}$, 则 $M\underset{R}{\otimes}-$与$-\underset{R}{\otimes}N$都是相应范畴间的右正合共变函子.

证 只需对 $M\underset{R}{\otimes}-$进行证明(对$-\underset{R}{\otimes}N$ 的证明是类似的). 注意其共变性已由本章§3 定理 11 指出, 这里只需再证右正合性.

任取(比如${}_R\mathfrak{M}$ 中的)正合列

$$A\xrightarrow{\alpha}B\xrightarrow{\beta}C\longrightarrow 0 \tag{4}$$

注意

$$M\underset{R}{\otimes}-(\alpha)=I_M\otimes\alpha$$

$$M\underset{R}{\otimes}-(\beta)=I_M\otimes\beta$$

且对同态列

$$M\underset{R}{\otimes}A\xrightarrow{I_M\otimes\alpha}M\underset{R}{\otimes}B\xrightarrow{I_M\otimes\beta}M\underset{R}{\otimes}C\longrightarrow 0$$

有

$$(I_M\otimes\beta)(I_M\otimes\alpha)=I_M\otimes\beta\alpha\underset{\beta\alpha=0}{=\!=}0$$

于是有

(i) $\mathrm{Im}(I_M\otimes\alpha)\subseteq\mathrm{Ker}(I_M\otimes\beta)$.

再来证

(ii) $\mathrm{Ker}(I_M\otimes\beta)\subseteq\mathrm{Im}(I_M\otimes\alpha)$.

为证明这一点, 考察下图(其中 π 为标准同态, 为简单起见, ⊗下方的 R 均省去). 与群同态定理同理, 由(i)知, 必有模同态 $\overline{\beta}$ 使下页图的①为交换的, 且

$$\overline{\beta}(m\otimes b+\mathrm{Im}(I_M\otimes\alpha))=m\otimes\beta(b),\quad \forall\, m\in M, b\in B$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
M\otimes A & \xrightarrow{I_M\otimes\alpha} & M\otimes B & \xrightarrow{I_M\otimes\beta} & M\otimes C & \longrightarrow & 0 \\
 & & \Big\downarrow \pi & \textcircled{1}\ \overline{\beta}\nearrow\ \swarrow\overline{f}\ \textcircled{2} & \Big\uparrow \otimes & & \\
 & & M\otimes B/\mathrm{Im}(I_M\otimes\alpha) & \xleftarrow{f} & M\times C & &
\end{array}
$$

因此,为证(ii)只需证 $\overline{\beta}$ 为同构(此时 $I_M\otimes\beta=\overline{\beta}\pi$ 满,因此也顺便证出了 $I_M\otimes\beta$ 满).为此,来找 $\overline{\beta}$ 的逆同态.

从上图中 $M\times C$ 出发,定义图中的映射 f 使

$$f(m,c)=m\otimes b+\mathrm{Im}(I_M\otimes\alpha),\quad \forall\, m\in M,c\in C$$

其中 $b\in B$ 使 $\beta(b)=c$(注意 β 满).

若 $\beta(b')=\beta(b)=c\in C,b'\in B$,则 $\beta(b-b')=0$,即

$$b-b'\in\mathrm{Ker}\beta\underset{(4)\text{正合}}{=\!=}\mathrm{Im}\alpha$$

因此有 $a\in A$ 使 $b-b'=\alpha(a)$.此时

$$m\otimes b-m\otimes b'=m\otimes(b-b')=(I_M\otimes\alpha)(m\otimes a)\in\mathrm{Im}(I_M\otimes\alpha)$$

由此知,f 是完全确定的.

容易验证 f 为双加 R – 平衡的(R 交换时为双线性的).于是由张量积的泛性质知,有上图中的模同态 $\overline{f}$ 使②为交换的,即

$$\overline{f}(m\otimes c)=m\otimes b+\mathrm{Im}(I_M\otimes\alpha)$$

易验知 $\overline{f}\,\overline{\beta}$ 及 $\overline{\beta}\,\overline{f}$ 都是恒等同态.故 $\overline{\beta}$ 为同构.

(iii) $I_M\otimes\beta$ 满:已由上段证明顺便给出.

总上即得欲证. □

注 3 $M\underset{R}{\otimes}-$,$-\underset{R}{\otimes}N$ 都未必为左正合的,因此未必为正合的.这可由下例说明.

例 3 令 $R=\mathbb{Z}$, $M=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, 此时虽有$\mathbb{Z}$-模正合列

$$0\longrightarrow\mathbb{Z}\xrightarrow{\alpha}\mathbb{Q}\longrightarrow\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\longrightarrow 0$$

但(见本章§3,例1)

$$0\longrightarrow \underset{\cong\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}{M\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}}\longrightarrow \underset{=\ 0}{M\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}}\longrightarrow M\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

显然不正合. 因此 $M\otimes_R-$未必左正合.

注意$\mathbb{Z}$为交换环,取 $N=M$ 则 $M\otimes_{\mathbb{Z}}X\simeq X\otimes_{\mathbb{Z}}M=X\otimes_{\mathbb{Z}}N$. 于是由此即知$-\otimes_R N$ 也未必为左正合的.

研究 $M\otimes_R-$, $-\otimes_R N$ 左正合(定理 2 已指出它们是右正合的,这里的“左正合”事实上即“正合”)的条件将引出又一个重要的模类——平坦模. 平坦模与投射模、内射模是模论及同调代数中的三大重要模类. 我们将在下章中逐节进行介绍.

现在对 Hom 函子研究较弱一些的问题. 即, 不要求 $\mathrm{Hom}_R(A,-)$、$\mathrm{Hom}_R(-,A)$将一切短正合列变成短正合列,而只要求它们将一类特殊的短正合列变成短正合列,看看 A 应满足什么条件?

注意 R-模短正合列

$$0\longrightarrow K\xrightarrow{f}M\xrightarrow{g}N\longrightarrow 0 \tag{5}$$

中最关键的是中间项 M,因为 $N=\mathrm{Im}g$, $K\simeq\mathrm{Ker}g$ 都是由M 及由 M 出发的同态g 确定的. 事实上,K 可看作是M 的子模,N 可看作是M 的商模.

先看看函子 $\mathrm{Hom}_R(A,-)$. 由上已知它是左正合共变的. 要求它将(5)变成短正合列,显然等价于要求

$$\mathrm{Hom}_R(A,M)\xrightarrow{g_*}\mathrm{Hom}_R(A,N)$$

是满同态. 即$\forall\gamma\in\mathrm{Hom}_R(A,N)$,必有$\overline{\gamma}\in\mathrm{Hom}_R(A,M)$使

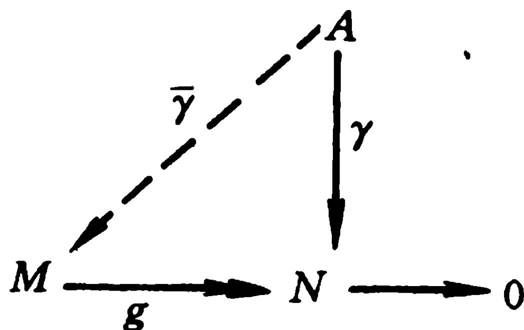
$$g_*(\overline{\gamma})=g\overline{\gamma}=\gamma$$

由此引出下述 M—投射模的概念.

定义 2 设 $M, A \in {}_R\mathfrak{M}$. 若对任一满同态 $g \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ 以及任一同态 $\gamma \in \mathrm{Hom}_R(A, N)$ 都有 $\overline{\gamma} \in \mathrm{Hom}_R(A, M)$ 使

$$\gamma = g\overline{\gamma}$$

即图



为交换图,则称 A 为 M - 投射(左 R—)模(M - projective module).

于是我们得到

命题 3 设 $A, M \in {}_R\mathfrak{M}$,则下述两点是等价的:

(i) A 是 M - 投射的;

(ii) 对每一个以 M 居中的${}_R\mathfrak{M}$ 中短正合列(5),

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(A, K) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_R(A, M) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_R(A, N) \longrightarrow 0$$

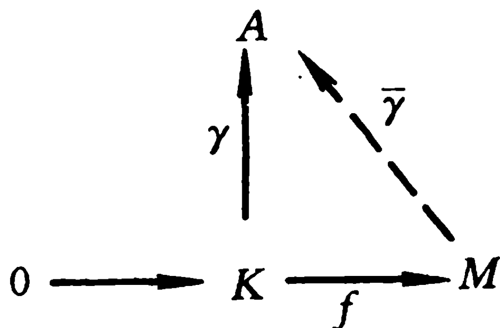
是正合的.

对偶地(为了统一地用(5),不拘于直接的"对偶翻译")有

定义 2° 设 $M, A \in {}_R\mathfrak{M}$. 若对任一单同态 $f \in \mathrm{Hom}_R(K, M)$ 与任一 $\gamma \in \mathrm{Hom}_R(K, A)$,都有 $\overline{\gamma} \in \mathrm{Hom}_R(M, A)$ 使

$$\gamma = \overline{\gamma} f$$

即下图



为交换图,则称 A 为 $M-$内射(左 $R-$)模($M-$injective module).

对偶地可得

命题 3° 设 $A, M\in {}_R\mathfrak{M}$. 则下述两点是等价的:

(i)° A 是M—内射的;

(ii)° 对每一个以 M 居中的${}_R\mathfrak{M}$ 中的短正合列(5),

$$0\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(N,A)\xrightarrow{g^*}\mathrm{Hom}_R(M,A)\xrightarrow{f^*}\mathrm{Hom}_R(K,A)\longrightarrow 0$$

是正合的.

M—投射模与 M—内射模都是近十几年来研究的热门对象之一. 在下章将看到,对一切 M 都是M—投射的(M—内射的)模正好就是投射(内射)模. 当然,对函子⊗也可相应地引入 M—平坦模的概念. 但它可转化为 M—内射模的研究,相对地说,意义较小. 这里不再介绍.

习 题 1.5

1. 设 $M\in\mathfrak{M}_R, N\in {}_R\mathfrak{M}$. 证明:对任意的 $m\in M, n\in N$,

$$0\otimes n=m\otimes 0=0$$
$$-(m\otimes n)=(-m)\otimes n=m\otimes(-n)$$
$$a(m\otimes n)=(am)\otimes n=m\otimes(an),\quad \forall a\in\mathbb{Z}$$

2. 在${}_R\mathfrak{M}$ 中证明:短正合列

$$0\to K\to M\to N\to 0$$

可裂的充要条件是 K 为$M-$内射的或 N 是$M-$投射的.

3. 在${}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M}$ 中证明:$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},—)$与 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(—,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$都不将正合列

$$0\to\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\to 0$$

变成正合列.

4. 在${}_R\mathfrak{M}$ 中用不同于定理 1 的证法证明 $\mathrm{Hom}_R(M,—)$的左正合性.

§6　直和与直积

在本章§4中，我们已处理了两个R－模的直和，借以刻画可裂短正合列．在本节中我们将两个R－模的直和推广到任意多个R－模的直和，并介绍其对偶概念——直积．然后给出它们的泛性质，从而得到适用于一般范畴的直和与直积的定义．为了今后应用的需要，在下节中我们还将给出模范畴中函子Hom、$\otimes$与直和、直积的关系．在本节中我们总是用J表示集合，可以是有限集，也可以是无限集．先给出如下的定义．

定义1　设R为任意环，$A_j \in {}_R\mathfrak{M}$，$\forall j \in J$．对它们的笛卡尔积(Cartesian product)

$$\underset{j\in J}{\times} A_j = \{(\cdots, a_j, \cdots) \equiv (a_j) \mid a_j \in A_j \quad j \in J\}$$

按分量定义如下向量式的运算：

$$(a_j) + (b_j) = (a_j + b_j)$$

$$r(a_j) = (ra_j) \quad \forall r \in R, a_j, b_j \in A_j$$

则得一个左R－模，记为$\prod\limits_{j\in J} A_j$，称为$\{A_j \mid j \in J\}$的**直积**(direct product)或**积**(product)．

定义2　定义1中由

$$\{(\cdots, a_j, \cdots) \mid 只有有限个非零分量\}$$

构成的$\prod\limits_{j\in J} A_j$的$R$－子模称为$\{A_j \mid j \in J\}$的**直和**(direct sum)或**上积**(coproduct)，记为$\coprod\limits_{j\in J} A_j$或$\bigoplus\limits_{j\in J} A_j$．$A_j$称为$\coprod\limits_{j\in J} A_j$的(第$j$个)**直和项**(summand)．在$|J| = n < \infty$时，也记上述直和为$A_1 \oplus \cdots \oplus A_n$，或$\bigoplus\limits_{j=1}^{n} A_j$，有时也记为$\coprod\limits_{j=1}^{n} A_j$．

在有些文献上也称直积为强直积或完全直和，而称直和为弱直积．

显然地，由定义可知

$$\coprod_{j\in J}A_j \lneqq \prod_{j\in J}A_j,\quad 当|J|=\infty时,$$

$$\coprod_{j=1}^{n}A_j=\prod_{j=1}^{n}A_j,\quad 当 n<\infty时.$$

现在来看几个例子.

例 1 设 R 为除环(体),则任意的 $M\in{}_R\mathfrak{M}$(即 M 为 R 上的线性空间)必有基(即为自由模).于是必有 J 使

$$M\simeq\coprod_{j\in J}R$$

例 2 容易证明:对任意环 R,若 M 为自由左(右)R-模,以 $\{x_j\mid j\in J\}$为基,则 M 也可表如

$$M\simeq\coprod_{j\in J}R$$

当$|J|=n<\infty$时,常记 $\coprod_{j\in J}R\doteq R^n$,对一般的 J,则记 $\coprod_{j\in J}R$ 为 $R^{(J)}$或 R^J.对一般的 R-模 A 也常将$\coprod_{j=1}^{n}A$ 记为A^n,称为 A 的 n 次直幂(direct power).

例 3 设 $M_j<M\in{}_R\mathfrak{M},j=1,2,M_1\cap M_2=0$ 且 $M_1+M_2=M$,则 $M\simeq M_1\oplus M_2$,常记为 $M=M_1\oplus M_2$.

注 1 一般地,若 $A_j<A\in{}_R\mathfrak{M},j\in J$ 且有

(i) $A=\sum_{j\in J}A_j$;

(ii) $A_i\cap\sum_{\substack{j\in J\\ j\neq i}}A_j=0$,

则称 A 为$\{A_j\mid j\in J\}$的**内直和**(internal direct sum),记为$\dot{\sum_{j\in J}}A_j$(注意“$\sum$”上有“·”).而定义 2 中定义的直和称为**外直和**(external direct sum).

注意到有 R-模同构

$$A_j\simeq(\cdots,0,\cdots,0,A_j,0,\cdots,0,\cdots)$$

则知

$$\dot{\sum_{j\in J}}A_j\simeq\coprod_{j\in J}A_j$$

因此,以后我们将不再区分内直和与外直和,统称为直和.

定义 3　设 R 为任意环,在${}_R\mathfrak{M}$(或 $\mathfrak{M}_R$)中对于 $A=\coprod_{j\in J}A_j$ 或 $A=\prod_{j\in J}A_j$,规定

$$p_i((a_j))=a_i,\quad \forall i,j\in J, a_i\in A_i$$

称这个满同态 $p_i:A\twoheadrightarrow A_i$ 为这个直和或直积的第 i 个**标准投射**(canonical projection).

规定

$$\lambda_i((a_j))=(\delta_{ij}a_j)$$

即

$$\lambda_i((a_j))=(\cdots,0,\cdots,0,a_i,0,\cdots),\quad \forall i,j\in J, a_i\in A_i$$

称这个单同态 $\lambda_i:A_i\rightarrowtail A$ 为此直和或直积的第 i 个**标准单射**(canonical injection).

由此定义可看出如下结果成立.

命题 1　在定义 3 中,必有

(i) $p_i\lambda_j=\delta_{ij}I_{A_j}, \forall i,j\in J$;　(1)

(ii) 在 $A=\coprod_{j\in J}A_j$ 时,

$$\sum_{j\in J}\lambda_j p_j=I_A \tag{2}$$

且对任意的 $a\in A$,

$$|\{j\mid p_j(a)\neq 0\}|<\infty$$

因此,上面同态等式中,左端作用于 A 的任一元素都事实上是一个有限和;

(iii) 上述的(i),(ii)给出了直和的特征性质,即,有 R-模满同态 $p_i:A\twoheadrightarrow A_i$ 与R-模单同态 $\lambda_i:A_i\rightarrowtail A$ 满足(1),(2)的充要条件是有 R-模同构 $A\simeq\coprod_{j\in J}A_j$.

注 2　若 $B<\prod_{j\in J}A_j\in{}_R\mathfrak{M}$ 且 $p_j(B)=A_j, \forall j\in J$,则称 B 为 $\{A_j\mid j\in J\}$的**亚直积或次直积**(subdirect product).显然$\coprod_{j\in J}A_j$,$\prod_{j\in J}A_j$ 都是$\{A_j\mid j\in J\}$的亚直积.

下面我们介绍直和与直积的特征性质——泛性质(universal property).以便将上述定义向一般范畴推广.

定理 1(直和的泛性质,$\mathrm{UP_{II}}$)对任意的环 R,在${}_R\mathfrak{M}(\mathfrak{M}_R)$中 $A\simeq\coprod\limits_{j\in J}A_j$ 的充要条件是有 $\alpha_j\in\mathrm{Hom}_R(A_j,A)\ \forall j\in J$,使对任意的 $X\in{}_R\mathfrak{M}(\mathfrak{M}_R)$与 $f_j\in\mathrm{Hom}_R(A_j,X)$都有唯一的 $\varphi\in\mathrm{Hom}_R(A,X)$使 $\varphi\alpha_j=f_j,\ \forall j\in J$,即有一族交换图

$$\begin{array}{ccc} A_j & \xrightarrow{\alpha_j} & A \\ {\scriptstyle \forall f_j}\big\downarrow & \swarrow{\scriptstyle \exists!\,\varphi} & \\ \forall X & & \end{array} \qquad \forall j\in J \tag{3}$$

称 φ 为$\{f_j\}$的直和,记为 $\varphi=\coprod\limits_{j\in J}f_j$.

证 $\Rightarrow$:不妨设 $A=\coprod\limits_{j\in J}A_j$.定义 $\varphi=\sum\limits_{i\in J}f_ip_i$,即

$$\varphi(a)=\sum_{i\in J}f_ip_i(a),\ \forall a\in A \tag{4}$$

其中 p_i 由定义 3 给出.由命题 1(ii)知,对任意的 a,上式右端都是一个有限和,因此 φ 是一个确定的R-模同态.再取 $\alpha_j=\lambda_j$(见定义 3),则

$$\varphi\lambda_j(a_j)=\sum_{i\in J}f_ip_i(\lambda_j(a_j))\underset{\text{命题1,(i)}}{=\!=}f_j(a_j),\ \forall j\in J,a_j\in A_j.$$

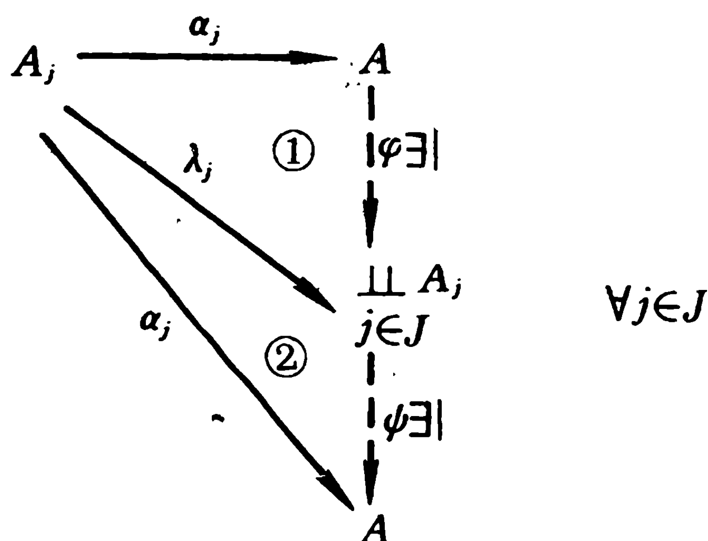
即(3)中的图为交换图.

再证 φ 的唯一性.若 $\psi\in\mathrm{Hom}_R(A,X)$也使图(3)交换,则

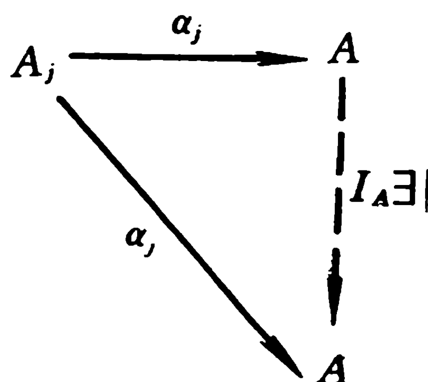
$$\begin{aligned}\psi(a)&\underset{\text{命题1,(ii)}}{=\!=}\psi\Big(\sum_{j\in J}\lambda_jp_j\Big)(a)=\sum_{j\in J}\psi\lambda_jp_j(a)\\&\underset{\substack{(3)\text{交换}\\ \alpha_j=\lambda_j}}{=\!=}\sum_{j\in J}f_jp_j(a)\underset{(4)}{=}\varphi(a),\quad\forall a\in A\end{aligned}$$

因此 $\psi=\varphi$.

$\Leftarrow$:考察图



取 $X=\coprod_{j\in J}A_j$，由已知条件知①是交换的，取 $X=A$，用上段已证结果知②是交换的．由①、②的交换性并注意当然地有下面的交换图



知 $\psi\varphi=I_A$．同理知 $\varphi\psi=I_{\amalg A_j}$．故 φ 为 R－模同构．即 $A\simeq\coprod_{j\in J}A_j$．

□

通俗地讲，$\{A_j\}$的直和就是可使一切 A_j“打进去”的始对象．

由定理 1 可立得如下推论．

推论 1　在定理 1 中，

(i) $\alpha_j, j\in J$ 都是单同态；

(ii) 对任意的 $g\in\mathrm{Hom}_R(X,Y)$，$gf_j\in\mathrm{Hom}_R(A_j,Y)$，$j\in J$．因此，

$$g\coprod_{j\in J}f_j=\coprod_{j\in J}gf_j$$

(iii) 当 $A=\coprod_{j\in J}A_j$ 时,

$\varphi(a)=(\coprod_{j\in J}f_j)(a)=\sum_{j\in J}f_j(a_j),\quad \forall a=(\cdots,a_j,\cdots)\in A$

作为直和的应用,我们来看两个例子.其中例 5 是一个有用的结论,例 4 则给出一个有用的方法.

例 4 设 $M\in{}_R\mathfrak{M}$, $S=\text{End}_R M$ 为 M 的自同态环.则 M 可分解为非平凡直和(即直和项$\neq 0, M$)的充要条件是 S 有非平凡的幂等元(即有 $e\neq 0,1, e^2=e\in S$)使 $eM\neq 0, M$.(注意 M 有显见的左 S-模结构).

事实上,若 $e\in S, e\neq 0,1, e^2=e$,则 $e+(1-e)=1$(这里的"1"为 S 的单位元,即,M 上的恒等自同构 I_M).于是

$$M=eM+(1-e)M$$

若 $x\in eM\cap(1-e)M$,则有 $m, m_1\in M$ 使

$$x=em_1=(1-e)m$$

但

$$em_1=e^2m_1=e(1-e)m=(e-e)m=0$$

因此 $x=0$,即

$$eM\cap(1-e)M=0$$

从例 3,并注意 e 为 M 上非零的自同态且 $e\neq I_M$,知

$$M=eM\oplus(1-e)M$$

且这是一个非平凡的直和分解.

反过来,设

$$M=M_1\oplus M_2,\ M_1,\ M_2\neq 0, M$$

则有 M 上的 R-模自同态(到第一直和项的投射)

$$\pi_1: M\to M$$

$$\pi_1(m_1,m_2)=m_1,\quad \forall m_j\in M_j, j=1,2$$

显然,$\pi_1\in\text{End}_R M$ 满足

$$\pi_1^2=\pi_1,\quad \pi_1\neq 0,1$$

于是 S 有非平凡的幂等元.

由此例知，M 有无非平凡直和分解与 $S=\mathrm{End}_RM$ 有无非平凡幂等元是等价的两件事. 无平凡直和分解的模又称为**不可分解模**(indecomposable module). 特别地，对于环 R，由于不难验证

$$\mathrm{End}_RR=\mathrm{Hom}_R(R,R)$$

为同构于 R 的环，R 能否分解为非平凡左(右)理想的直和与 R 有无非平凡幂等元是等价的. 比如，$\mathbb{Z}$ 无非平凡幂等元，因此 $\mathbb{Z}$ 不能分解为非平凡的左(右)理想之直和. 这与 Abel 群的理论中 $\mathbb{Z}$ 的不可分解性是一致的.

今后为简单起见，将 Abel 加群(有时也看作环) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 记为 $\mathbb{Z}_n$. 于是

$$\mathbb{Z}_n=\{\overline{0},\overline{1},\cdots,\overline{n-1}\}\ (\mathrm{mod}\ n\ \text{运算})\in{}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M}$$

例 5 考察 Abel 加群 $\mathbb{Z}_{30}\in{}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M}$. 注意 $30=2\cdot3\cdot5$, $\frac{30}{2}=15$, $\frac{30}{3}=10$, $\frac{30}{5}=6$, 且 $15\mathbb{Z}_{30}$, $6\mathbb{Z}_{30}$, $6\mathbb{Z}_{30}$ 都是 $\mathbb{Z}_{30}$ 的子群($\mathbb{Z}$-子模). 因此有单同态

$$15\mathbb{Z}_{30}\overset{i_1}{\rightarrowtail}\mathbb{Z}_{30}$$

$$10\mathbb{Z}_{30}\overset{i_2}{\rightarrowtail}\mathbb{Z}_{30}$$

$$6\mathbb{Z}_{30}\overset{i_3}{\rightarrowtail}\mathbb{Z}_{30}$$

由定理 1(直和的泛性质)知有唯一的 $\mathbb{Z}$-模同态

$$i=i_1\oplus i_2\oplus i_3:15\mathbb{Z}_{30}\oplus10\mathbb{Z}_{30}\oplus6\mathbb{Z}_{30}\to\mathbb{Z}_{30}$$

另一方面，

$$\mathrm{Im}\,i=15\mathbb{Z}_{30}+10\mathbb{Z}_{30}+6\mathbb{Z}_{30}=5(3\mathbb{Z}_{30}+2\mathbb{Z}_{30})+6\mathbb{Z}_{30}$$

$$\xlongequal[\substack{(2,3)=1\\ \exists u,v\in\mathbb{Z}\text{使}\\ 2u+3v=1\\ \Rightarrow 2\overline{u}+3\overline{v}=\overline{1}(\mathrm{mod}30)}]{}5\mathbb{Z}_{30}+6\mathbb{Z}_{30}\xlongequal[(5,6)=1]{}\mathbb{Z}_{30}$$

即 i 为满同态. 但

$$15\,\mathbb{Z}_{30}=\{\overline{15},\overline{0}\}$$

$$10\,\mathbb{Z}_{30}=\{\overline{10},\overline{20},\overline{0}\}$$

$$6\,\mathbb{Z}_{30}=\{\overline{6},\overline{12},\overline{18},\overline{24},\overline{0}\}$$（都是 mod30 运算）

于是

$$15\,\mathbb{Z}_{30}\simeq\mathbb{Z}_2,\ 10\,\mathbb{Z}_{30}\simeq\mathbb{Z}_3,\ 6\,\mathbb{Z}_{30}\simeq\mathbb{Z}_5$$

由此知

$$|15\,\mathbb{Z}_{30}\oplus 10\,\mathbb{Z}_{30}\oplus 6\,\mathbb{Z}_{30}|=30=|\mathbb{Z}_{30}|$$

因此，i 为同构. 故有$\mathbb{Z}$－模分解（即 Abel 群的直和分解）

$$\mathbb{Z}_{30}\simeq\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_3\oplus\mathbb{Z}_5$$

由此例的方法可类似地证明：设 G 为 n 阶循环群（$G\simeq\mathbb{Z}_n$），$n=P_1^{n_1}P_2^{n_2}\cdots P_k^{n_k}$，$P_1,P_2,\cdots,P_k$ 为 k 个不同的素数，则

$$G\simeq\mathbb{Z}_n\simeq\mathbb{Z}_{P_1^{n_1}}\oplus\mathbb{Z}_{P_2^{n_2}}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}_{P_k^{n_k}}$$

对偶于定理 1，我们给出直积的泛性质如下：

定理 1°（直积的泛性质，UP_{Π}）　对任意的环 R，在 ${}_R\mathfrak{M}$ 中 $A\simeq\prod\limits_{j\in J}A_j$ 的充要条件是有 $\beta_j\in\mathrm{Hom}_R(A,A_j)$，$\forall j\in J$，使对任意的 $X\in{}_R\mathfrak{M}$ 与 $g_j\in\mathrm{Hom}_R(X,A_j)$，$j\in J$，都有唯一的 $\psi\in\mathrm{Hom}_R(X,A)$使

$$\beta_j\psi=g_j,\quad\forall j\in J$$

即有一族交换图

$$\begin{array}{ccc} A_j & \xleftarrow{\ \beta_j\ } & A \\ {\scriptstyle\forall g_j}\uparrow & \nearrow{\scriptstyle \exists!\psi} & \\ \forall X & & \end{array}\qquad \forall j\in J \qquad (3)°$$

称 ψ 为 $\{g_j\}$ 的直积,记为 $\psi=\prod\limits_{j\in J}g_j$.

在证明此定理之前,我们需注意:定理 1 之证中"⇒"部分不能对偶地用于本定理"⇒"之证.因为若取 $\psi=\sum\lambda_i g_i$,作用于 X 的元素将不是有限和(当 $|J|=\infty$ 时).因此我们采用如下证法.

定理 1°之证 ⇒:不妨设 $A=\prod\limits_{j\in J}A_j$,取 $\beta_j=p_j$.定义 ψ 使

$$\psi(x)=(g_i(x)),\quad \forall x\in X$$

则 $\psi\in \mathrm{Hom}_R(X,A)$ 且

$$\beta_j\psi(x)=p_j\psi(x)=p_j((g_i(x))=g_j(x),\quad \forall x\in X, j\in J$$

即(3)°为交换图.

再证 ψ 的唯一性.若 $\psi_1\in \mathrm{Hom}_R(X,A)$ 也使(3)°为交换图.则对任意的 $x\in X$ 以及任意的 $j\in J$,有

$$p_j\psi_1(x)=g_j(x)=p_j\psi(x)$$

即 $\psi_1(x)=\psi(x),\forall x\in X$.故 $\psi_1=\psi$.

⇐:对偶于定理 1"⇐"之证.此处从略. □

由此定理知,$\{A_j\}$ 的直积就是可使一切 A_j"拉出来"的终对象.

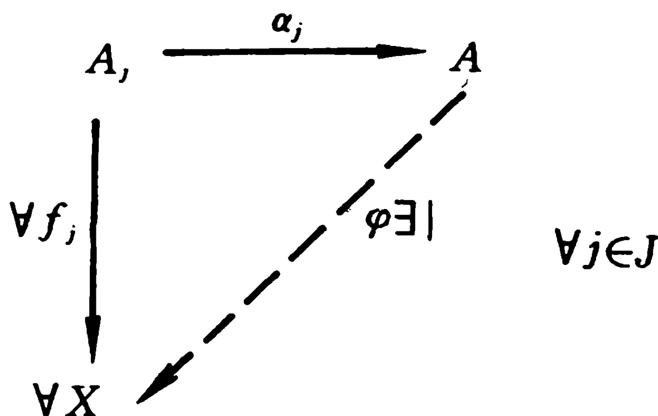
由定理 1 与定理 1°的启发,我们可以给出对任意范畴 $\mathscr{C}$ 都适用的直和与直积概念(但不能保证对每个范畴 $\mathscr{C}$ 的任意对象集它们都存在,尽管下面可证"如存在,在同构(等价)意义下必唯一").

定义 4 设 $\mathscr{C}$ 为任一范畴,$\{A_j\mid j\in J\}\subset \mathrm{Ob}\mathscr{C}$($J$ 为集合).如果有 $A\in \mathrm{Ob}\mathscr{C}$ 与 $\alpha_j\in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A_j,A),\forall j\in J$,具有如下的泛性质:

对任意的 $X\in \mathrm{Ob}\mathscr{C}$ 与 $f_j\in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A_j,X)$ 都有唯一的 $\varphi\in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,X)$ 使

$$\varphi\alpha_j=f_j,\forall j\in J$$

即有一族交换图



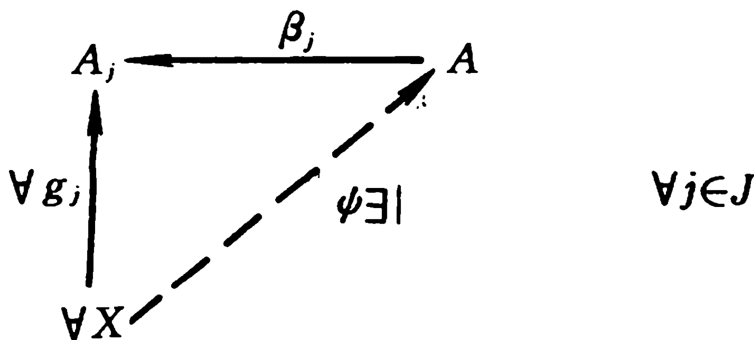
则称(A,α_j)或 A 为对象A_j，$\forall j\in J$ 的**上积**或**直和**，记为 $A=\coprod_{j\in J}A_j$. 当$|J|=n<\infty$时也记为 $A_1\amalg\cdots\amalg A_n$ 或$\coprod_{j=1}^{n}A_j$.

定义 4° 设$\mathscr{C}$为任一范畴，$\{A_j\mid j\in J\}\subset\mathrm{Ob}\mathscr{C}$($J$ 为集合). 如果有 $A\in\mathrm{Ob}\mathscr{C}$ 与 $\beta_j\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,A_j)$，$\forall j\in J$，且有如下的泛性质：

对任意的 $X\in\mathrm{Ob}\mathscr{C}$ 与 $g_j\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,A_j)$都有唯一的 $\psi\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,A)$使

$$\beta_j\psi=g_j,\quad \forall j\in J$$

即有一族交换图



则称(A,β_j)或 A 为对象A_j，$\forall j\in J$ 的**积**或**直积**，记为 $A=\prod_{j\in J}A_j$. 当$|J|=n<\infty$时也记为 $A_1\Pi\cdots\Pi A_n$ 或$\prod_{j=1}^{n}A_j$.

注 3 在定义 4 与定义 4°中我们都强调了“J 为集合”这是很重要的. 事实上，可以证明(参看[PP,79,p.45])：若在范畴 $\mathscr{C}$ 中，

任意的$\{A_j \mid j \in J'\} \subset \mathrm{Ob}\mathscr{C}$都有积，其中$J'$为一个真类（非集合的类），则对任意的$A, B \in \mathrm{Ob}\mathscr{C}$，$|\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)| \leqslant 1$. 这种范畴称为预序(preordered)范畴.

对任意集合J，以及任意的$\{A_j \mid j \in J\} \subset \mathrm{Ob}\mathscr{C}$，$\prod\limits_{j\in J} A_j$（$\coprod\limits_{j\in J} A_j$）都存在的范畴$\mathscr{C}$称为**带积(上积)范畴**(category with products (coproducts)). 可以证明：带积的小范畴必为预序范畴（仍见[PP, 79, p. 45]）. 由此又可顺便看出：${}_R\mathfrak{M}$不是小范畴（建议读者想想看，这是为什么?）.

现在设$\mathscr{C}$为一个范畴，我们来作一个范畴$\mathbb{P}$. 取J为任一个集合，且取

$$\mathrm{Ob}\,\mathbb{P} = \{(X, \{g_j\}) \mid X \in \mathrm{Ob}\mathscr{C}, g_j \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, A_j), \forall j \in J\}$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{P}}((X, \{g_j\}), (Y, \{h_j\})) = \{f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y) \mid h_j f = g_j, \forall j \in J\}$$

态射合成即$\mathscr{C}$中的态射合成. 由定义 4°知，$\mathscr{C}$中$\{A_j \mid j \in J\}$的积如存在，则必为$\mathbb{P}$的终对象. 因此由本章§1知$\prod\limits_{j\in J} A_j$如存在，则在同构意义下是唯一的.

类似地（对偶地）对上积可构作一个范畴$\mathbb{CP}$，用始对象性质同理可知$\coprod\limits_{j\in J} A_j$如存在，在同构意义下也是唯一的. 于是我们得到

定理 2 任意范畴$\mathscr{C}$中对象集$\{A_j \mid j \in J\}$的积或上积，如存在，则在（$\mathscr{C}$中）同构意义下必是唯一的，且$\{A_j\}$的次序可以重排，因此积与上积在同构意义下都满足交换律与结合律.

下面再给出几个例子.

例 6 取范畴$\mathscr{C}$的对象类为全体有理数集$\mathbb{Q}$（因而是小范畴），态射集为

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(a, b) = \begin{cases} \{\varphi_{ab}\}, & a \leqslant b \text{ 时} \\ \varnothing, & a > b \text{ 时} \end{cases}$$

态射合成由

$$\varphi_{bc}\varphi_{ab} = \varphi_{ac}, \quad \text{当 } a \leqslant b \leqslant c \text{ 时}$$

给出. 取

$$S=\{a_j\in\mathbb{Q}\mid j\in J\},J\text{ 为一集合}$$

则容易看出

$$\coprod_{j\in J}a_j=\sup_{j\in J}\{a_j\}$$

$$\prod_{j\in J}a_j=\inf_{j\in J}\{a_j\}$$

这个例子给出了“对一些对象集可能不存在积与上积，但在存在时则一定唯一”的小范畴例子.

例 7　取范畴 $\mathscr{C}$ 的对象类为全体正整数(当然也是集合)，态射集为

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(a,b)=\begin{cases}\{\varphi_{ab}\}, & a\mid b(a\text{ 整除 }b)\text{时}\\ \varnothing, & a\nmid b\text{ 时}\end{cases}$$

态射合成由

$$\varphi_{bc}\varphi_{ab}=\varphi_{ac},\quad a\mid b\text{ 且 }b\mid c\text{ 时}$$

给出. 任取正整数的一个有限集

$$S=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$$

则可看出

$$\coprod_{j=1}^{n}a_j=[a_1,a_2,\cdots,a_n](a_1,a_2,\cdots,a_n\text{ 的最小公倍数})$$

$$\prod_{j=1}^{n}a_j=(a_1,a_2,\cdots,a_n)(a_1,a_2,\cdots,a_n\text{ 的最大公约数})$$

显然，在这个范畴中积或上积若存在则必唯一. 同时，有限积、有限上积都存在，但无限积、无限上积可不存在.

值得注意的是：对有零对象的范畴，作为命题 1,(i)的推广，我们可得如下更一般的结果. 当然，对一般的范畴无法如定义 3 那样定义 λ_j,p_j. 因此下面的推广结果只能是较弱的形式.

定理 3　设范畴 $\mathscr{C}$ 有零对象，$(A,\beta_j)=\prod_{j\in J}A_j$. 则对一切 $j\in J$，必有唯一的 $h_j\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A_j,A)$使

$$\beta_i h_j=\delta_{ij}I_{A_j},\quad\forall\, i,j\in J$$

证　在定义 4°的图(3)°中取 $X=A_j$，且取

$$g_i = \delta_{ij} I_{A_j}$$

则由直积的定义知,必有唯一的 $h_j \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A_j, A)$使

$$\beta_i h_j = g_i = \delta_{ij} I_{A_j}$$ □

定理 3° 设范畴 $\mathscr{C}$ 有零对象,$(A, \alpha_j) = \coprod_{j\in J} A_j$,则对一切 $j \in J$,必有唯一的 $k_j \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, A_j)$使

$$k_i \alpha_j = \delta_{ij} I_{A_j}, \quad \forall\, i, j \in J$$

证 注意,若 0 为 $\mathscr{C}$ 的零对象,则 $0^\circ = 0$ 为 $\mathscr{C}^\circ$的零对象,而定理 3 对一切有零对象的范畴都成立.同时,$\mathscr{C}$ 中的积即 $\mathscr{C}^\circ$中的上积.由此即知本定理一定成立. □

由此我们得到推论 1,(i)的如下推广.

推论 2 设范畴 $\mathscr{C}$ 有零对象,$(A, \beta_j) = \prod_{j\in J} A_j$ $((A, \alpha_j) = \coprod_{j\in J} A_j)$,则 β_j 都是满态射(α_j 都是单态射).

证 由定理 3、定理 3°,并注意 I_{A_j} 是 $\mathscr{C}$ 中既单又满的态射,即得证. □

推论 2 中的 α_j, β_j 有时也记成 i_j, π_j,分别被称为相应直和(直积)的标准单射与标准满射.

习 题 1.6

1. 设$\{A_j \mid j \in J\}$为(左)R-模的一个集合,$A \in {}_R\mathfrak{M}$,$\lambda_j \in \mathrm{Hom}_R(A_j, A)$,$p_j \in \mathrm{Hom}_R(A, A_j)$.

(1) 若$(A, p_j) = \prod_{j\in J} A_j$,证明:$(A, \lambda_j) \simeq \coprod_{j\in J} A_j$ 的充分必要条件是 $|J| < \infty$;

(2) 给出并证明(1)的对偶命题.

2. 在${}_R\mathfrak{M}$中设 $A = \coprod_{j\in J} A_j$,$f: A \to B$ 为同构,证明 $B = \coprod_{j\in J} f(A_j)$.

3. 在${}_R\mathfrak{M}$中设 $f_j, g_j \in \mathrm{Hom}_R(A_j, A)$,$j \in J$,$f = \coprod_{j\in J} f_j$,$g = \coprod_{j\in J} g_j$.证明:$f + g = \coprod_{j\in J} (f_j + g_j)$.

如果 $f = \prod_{j\in J} f_j$,$g = \prod_{j\in J} g_j$,$f + g = \prod_{j\in J} (f_j + g_j)$是否成立?为什么?

4. 设集合 $J = J_1 \dot{\cup} J_2$（即 $J = J_1 \cup J_2, J_1 \cap J_2 = \varnothing$），$\{A_j \mid j \in J\}$是(左) R-模的一个集合. 试给出适当的 R-模同态使

$$0 \to \coprod_{j \in J_1} A_j \to \coprod_{j \in J} A_j \to \coprod_{j \in J_2} A_j \to 0$$

$$0 \to \prod_{j \in J_1} A_j \to \prod_{j \in J} A_j \to \prod_{j \in J_2} A_j \to 0$$

都是可裂的短正合列.

5. 在集范畴$\mathbb{S}$中研究积与上积的含意.

§7 预加法范畴中 Hom、⊗与直和、直积的关系

在本节中我们来讨论两类重要函子 Hom 与⊗同直和、直积的关系. 即 Hom 与⊗作用于直和、直积，能得到那些结果？我们感兴趣的主要是模范畴. 但由上节可看出，在推广模范畴的结果时“有零对象”范畴类还嫌太大，因此得到的结果不尽人意. 本节中我们将研究本章§2定义的预加法范畴以及要求更强的加法范畴. 特别是对加法范畴我们将证明：加法函子都保持有限直和与有限直积. 由于 Hom，⊗都是加法函子，因此讨论它们与直和、直积的关系时重点将放在无限直和与无限直积上.

先回顾一下预加法范畴的概念(见本章§2定义3). 所谓“$\mathscr{C}$是预加法范畴”是指范畴$\mathscr{C}$有零对象，一切$\mathscr{C}$对象间的态射集都是加法 Abel 群，在态射可合成且可加时，加法与合成满足分配律. 现在来介绍预加法范畴与本节内容相关的一些性质. 首先由定义即得：

命题 1 设$\mathscr{C}$为预加法范畴，$A \in \mathrm{Ob}\mathscr{C}$，$R = \mathrm{End}_{\mathscr{C}}A = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, A)$，则以态射合成作为乘法，$R$是一个(有单位元$I_A$的结合)环.

在环$\mathrm{End}_{\mathscr{C}}A$中当然有如下的态射合成等式：

$$\tau(-\sigma) = -\tau\sigma = (-\tau)\sigma$$

$$(-\tau)(-\sigma) = \tau\sigma$$

事实上,对$\mathscr{C}$中可合成态射,比如$\sigma\in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$,$\tau\in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B,C)$时,$\tau$、$\sigma$可合成为$\tau\sigma$,这两个等式仍成立.即

命题 2 设$\mathscr{C}$为预加法范畴,τ,σ为使$\tau\sigma$有意义的态射,则

$$\tau(-\sigma)=-\tau\sigma=(-\tau)\sigma$$

$$(-\tau)(-\sigma)=\tau\sigma$$

证 在$\mathscr{C}$中当然有$\tau0=0$,$0\sigma=0$(尽管这些0含意不同,为简单起见,按原来的约定不加区别).于是由

$$0=\tau0=\tau(\sigma+(-\sigma))=\tau\sigma+\tau(-\sigma)$$

知

$$\tau(-\sigma)=-\tau\sigma$$

由

$$0=0\sigma=(\tau+(-\tau)\sigma=\tau\sigma+(-\tau)\sigma$$

知

$$(-\tau)\sigma=-\tau\sigma$$

因此

$$0=0(-\sigma)=(\tau+(-\tau))(-\sigma)=-\tau\sigma+(-\tau)(-\sigma)$$

故

$$(-\tau)(-\sigma)=\tau\sigma \qquad \square$$

现在对预加法范畴,我们可以对$|J|<\infty$的情况强化上节定理 3、定理 3°且给出概括上节命题 1 的一些结果.

定理 1 在预加法范畴$\mathscr{C}$中,设$\alpha_j\in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A_j,A)$,$j=1,2,\cdots,n$,则下述三点是等价的:

(i) $(A,\alpha_j)=\coprod_{j=1}^{n}A_j$;

(ii) 有唯一的$\beta_j\in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,A_j)$使

$$\beta_i\alpha_j=\delta_{ij}I_{A_j},\quad i,j=1,2,\cdots,n \tag{1}$$

且

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\beta_j=I_A \tag{2}$$

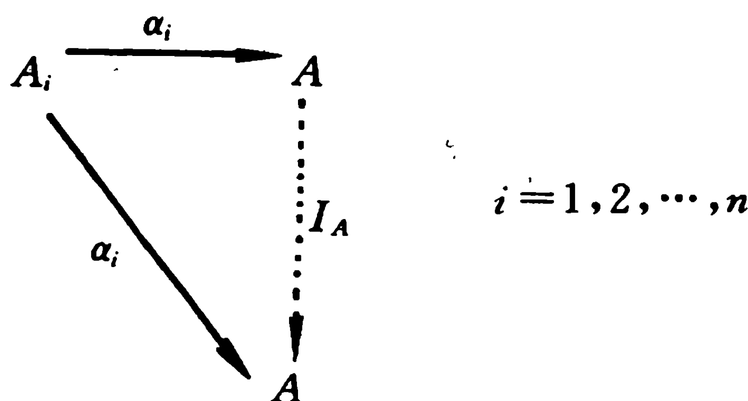
(iii) 有 $\beta_j \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, A_j)$使上述的(1)、(2)成立.

证 (i)⇒(ii):(1)式已由上节定理 3°得出.下证(2)(注意由上节定理 3°已知满足(1)的$\{\beta_j\}$是唯一的,这里不必再讨论唯一性).

事实上,由(1)有

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\beta_j\right)\alpha_i = \sum_{j=1}^{n}\alpha_j(\beta_j\alpha_i) \underset{(1)}{=} \alpha_i I_{A_i} = \alpha_i = I_A\alpha_i$$

再由下图



用直和定义中的泛性质知,I_A 是唯一使这些图为交换图的态射.因此(2)必成立.

(ii)⇒(iii)是当然的.

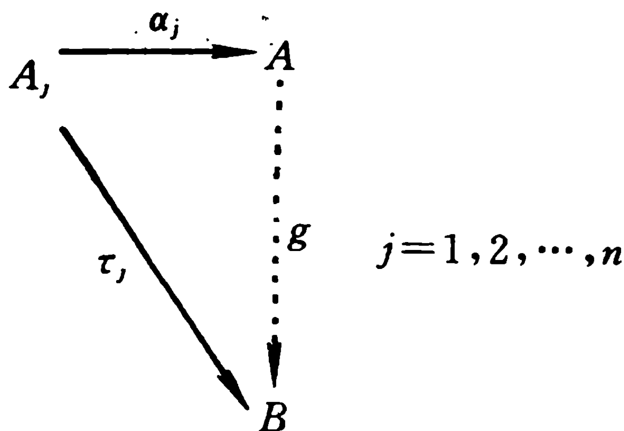
(iii)⇒(i):设对 A,$\{\alpha_j\}$有$\{\beta_j\}$使(1)、(2)成立.任取 $B\in \mathrm{Ob}\mathscr{C}$ 与 $\tau_j \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A_j, B)$.令

$$g = \sum_{i=1}^{n}\tau_i\beta_i \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$$

则

$$\begin{aligned} g\alpha_j = \sum_{i=1}^{n}\tau_i(\beta_i\alpha_j) &\underset{(1)}{=} \tau_j\beta_j\alpha_j \\ &\underset{(1)}{=} \tau_j I_{A_j} \\ &= \tau_j \end{aligned}$$

即有交换图



若又有 $g' \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$ 也使上图可换,即

$$g'\alpha_j = \tau_j, \quad j=1,2,\cdots,n$$

则
$$g' = g'I_A \underset{(2)}{=} g'\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\beta_j = \sum_{j=1}^{n}(g'\alpha_j)\beta_j = \sum_{j=1}^{n}\tau_j\beta_j = g$$

因此上述的 g 是唯一的. 故由直和的定义知

$$(A,\alpha_j) = \coprod_{j=1}^{n} A_j$$ □

推论 1 (i) 对定理 1 中满足三条件之一的 A 与 $\{\beta_j\}$,

$$(A,\beta_j) = \prod_{j=1}^{n} A_j \tag{3}$$

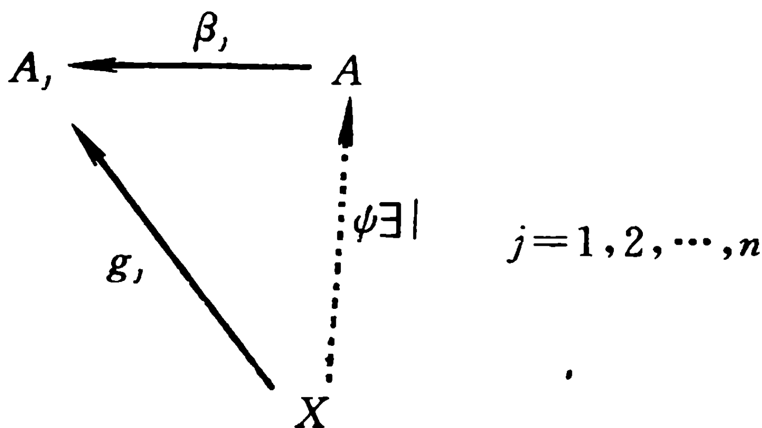
(ii) 在预加法范畴中,若(3)成立,则

$$(A,\alpha_j) = \coprod_{j=1}^{n} A_j$$

故在预加法范畴中,当 $|J| < \infty$, $\coprod_{j\in J} A_j$ 与 $\prod_{j\in J} A_j$ 可不加区别.

证 只需证(3),其他是显见的.

任取 $X \in \mathrm{Ob}\mathscr{C}$, $g_j \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, A_j)$, 只需证: 有唯一的 $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,A)$ 使 $\beta_j\psi = g_j$, $j=1,2,\cdots,n$, 即 ψ 使下图可换



这样就得出(3).

事实上,取

$$\psi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, A)$$

则

$$\beta_j \psi = \sum_{i=1}^{n} \beta_j \alpha_i g_i \underset{(1)}{=} I_{A_j} g_j = g_j, \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

从而知 ψ 存在.

若又有 $\psi' \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, A)$ 也使 $\beta_j \psi' = g_j, j = 1, 2, \cdots, n$,则

$$\psi' = I_A \psi' \underset{(2)}{=} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (\beta_j \psi') = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j g_j = \psi$$

从而又得出 ψ 的唯一性. □

现在我们引进比预加法范畴更强的加法范畴概念,从而由推论 1 可得到一个有趣的结果(下面的推论 2).

定义 1 设 $\mathscr{C}$ 为预加法范畴,若 $\mathscr{C}$ 的任何有限个对象 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 都有直和 $\coprod_{j=1}^{n} A_j$,则称 $\mathscr{C}$ 为**加法范畴**(additive category).

显然${}_R\mathfrak{M}$、$\mathbb{AG}$ 都是加法范畴,但$\mathbb{S}$ 不是预加法范畴,因而更不是加法范畴.

由推论 1 立得

推论 2 在加法范畴中任何有限个对象都有直积. 因此,若 $\mathscr{C}$ 为加法范畴,则 $\mathscr{C}$ 的反范畴 $\mathscr{C}^{\circ}$ 也是加法范畴.

事实上,若 $\mathscr{C}$ 中 $(A, \beta_j) = \prod_{j=1}^{n} A_j$,则在 $\mathscr{C}^{\circ}$ 中,

$$(A^{\circ} = A, \beta^{\circ}{}_j) = \coprod_{j=1}^{n} A^{\circ}{}_j = \prod_{j=1}^{n} A_j$$

由推论 2 知,对偶原理对加法范畴可放心使用. 即,对一切加法范畴都成立的命题,其对偶命题对一切加法范畴也都成立,只需证明其中的一个即可. 对预加法范畴也是如此,因为预加法范畴的反范畴显然也是预加法范畴. 现在我们已有不少对偶概念. 如始对象与终对象,单态射与满态射,直和与直积,左正合与右正合等. 也

已经知道了一些自对偶的概念,如零对象,同构(等价)等.

现在我们可据此写出定理 1 的对偶形式而不必再证.

定理 1° 在预加法范畴 $\mathscr{C}$ 中,设 $\beta_j \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, A_j)$, $j=1,2,\cdots,n$,则下述三点是等价的:

(i) $(A, \beta_j) = \prod_{j=1}^{n} A_j$;

(ii) 有唯一的 $\alpha_j \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A_j, A)$ 使

$$\beta_i \alpha_j = \delta_{ij} I_{A_j}, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n \tag{1}$$

且

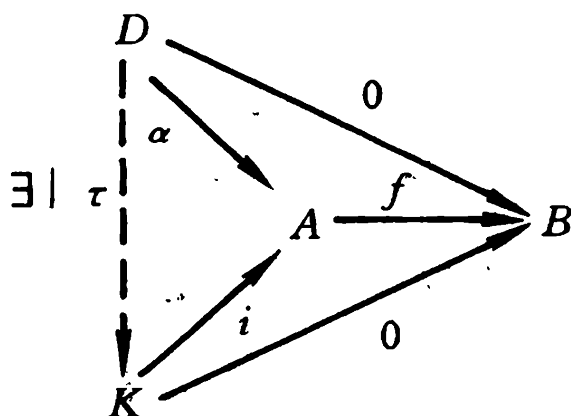
$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \beta_j = I_{A_j} \tag{2}$$

(iii) 有 $\alpha_j \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A_j, A)$ 使上述的(1)、(2)成立.

下面再给出范畴论中十分重要的对偶概念——态射的核与上核. 由于一般范畴(即使在有零对象的范畴)中的对象未必是集合. 更未必有代数结构. 因此模范畴、环范畴中核与上核的定义无法照搬. 为解决这个困难先给出模同态的一个关于核的泛性质. 设在 ${}_R\mathfrak{M}$ 中 $f \in \mathrm{Hom}_R(A, B)$. f 的核在同构意义下可视为 (K, i) 其中 $K \simeq \mathrm{Ker} f$, $i: K \to A$ 为单同态,也可将 i 视为 f 的核. 由习题 1.3 第 7 题(2)(也可直接证明)知 $\mathrm{Ker} f = (K, f)$ 具有如下的泛性质: $fi = 0$ 且对任意的 $D \in {}_R\mathfrak{M}$, $g \in \mathrm{Hom}_R(D, A)$,若 $fg = 0$,则必有唯一的 $\tau \in \mathrm{Hom}_R(D, K)$ 使 $i\tau = g$.

利用这个泛性质,我们不难给出对有零对象范畴适用的如下定义.

定义 2 设范畴 $\mathscr{C}$ 有零对象,因而有零态射, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$. 若 (K, i) $(K \in \mathrm{Ob}\mathscr{C}, i \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(K, A))$ 满足 $fi = 0$ 且有如下的泛性质:对任意的 $D \in \mathrm{Ob}\mathscr{C}$ 与 $g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(D, A)$,若 $fg = 0$,则必有唯一的 $\tau \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(D, K)$ 使 $i\tau = g$. 即有唯一的 τ 使下图成交换图.



则称(K,i)或 i 为 f 的核(Kernel),记为$(K,i)=\mathrm{Ker}f$ 或 $i=\mathrm{Ker}f$.有时也记成 $K=\mathrm{Ker}f$.

容易直接验证:定义 2 中 τ 的"唯一"去掉而另加上"i 为单态射(左可消)"后所得的定义仍与定义 2 等价.

对定义 2,我们可构作一个范畴$\mathbb{K}_f$ 使

$\mathrm{Ob}\,\mathbb{K}_f=\{(D,g)\mid D\in\mathrm{Ob}\mathscr{C},g\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(D,A)$使 $fg=0\}$

$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}_f}((D_1,g_1),(D_2,g_2))=\{\tau_1\mid\tau_1\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(D_1,D_2)$使 $g_2\tau_1=g_1\}$

$\mathbb{K}_f$ 中态射合成由 $\mathscr{C}$ 中态射合成给出.

显然地,$\mathrm{Ker}f=(K,i)$为$\mathbb{K}_f$ 的终对象.因此有

定理 2 在有零对象范畴 $\mathscr{C}$ 中的任一态射 f 若有核,则在同构意义下是唯一的.

这里讲的是"在同构意义下"是唯一的.事实上并非真正的唯一.比如$(K,i)=\mathrm{Ker}f$,当 $K'\overset{\varphi}{\simeq}K$ 时显然由定义 2 知$(K',i\varphi)$也是 $\mathrm{Ker}f$.这正如在$({}_R\mathfrak{M})$正合列

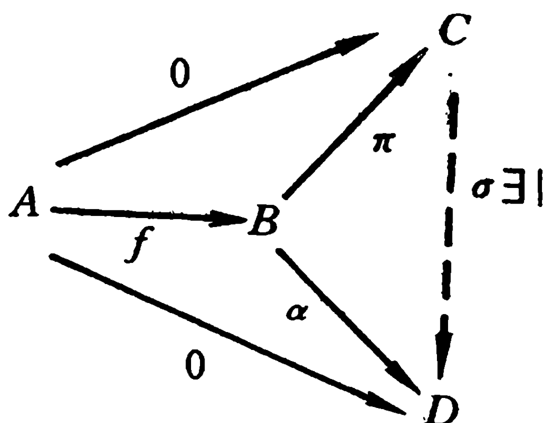
$$0\longrightarrow K\overset{i}{\rightarrowtail}A\overset{f}{\longrightarrow}B$$

中 K 未必为A 的子模,但通常也将 K 看作 $\mathrm{Ker}f$ 的道理一样.

对偶于定义 2,我们有

定义 2° 设范畴 $\mathscr{C}$ 有零对象,因而有零态射,$f\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$.若$(C,\pi)(C\in\mathrm{Ob}\mathscr{C},\pi\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B,C))$满足 $\pi f=0$ 且有如下的泛性质:对任意的 $D\in\mathrm{Ob}\mathscr{C}$ 与 $g\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B,D)$,在 $gf=0$ 时必

有唯一的 $\sigma\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C,D)$ 使 $\sigma\pi=g$，即 σ 使下图为交换图，



则称 (C,π) 为 f 的上核(Cokernel)，记为 $(C,\pi)=\mathrm{Coker}f$ 或 $\pi=\mathrm{Coker}f$，也记为 $C=\mathrm{Coker}f$.

对偶地可验证：定义 2°中 σ 的唯一性去掉，但加上"π 为满态射"后所得的定义与定义 2°是等价的. 同时仿前构作一个范畴 $\mathbb{C}\mathrm{K}_f$ 后，容易看出 $\mathrm{Coker}f=(C,\pi)$ 为 $\mathbb{C}\mathrm{K}_f$ 的始对象，因而有

定理 2°　在有零对象范畴 $\mathscr{C}$ 中的任一态射 f 若有上核，则在同构意义下是唯一的.

作类似于前面的分析，可知 $\mathrm{Coker}f$ 一般地也未必唯一，且对 ${}_R\mathfrak{M}$ 而言，对 $f:A\to B$ 必有正合列

$$A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{\pi}B/\mathrm{Im}f=\mathrm{Coker}f(R-\text{模同态的上核})$$

由定义 2°中的图可看出：对那里的 D 与 $g:B\to D$，由 $gf=0$ 知

$$\mathrm{Ker}\pi=\mathrm{Im}f\subseteq\mathrm{Ker}g$$

因此必有 $\sigma:\mathrm{Coker}f=B/\mathrm{Im}f\to D$ 使 $\sigma\pi=g$. 但 π 为满同态(等价于范畴意义下的满态射)，因此 σ 是唯一的. 由此知，定义 2°中定义的上核落实到 ${}_R\mathfrak{M}$ 中与 $R-$模同态的上核是一致的.

容易证明

命题 3　在有零对象的范畴中，

(i) 单态射的核为 $(O,0)$(前一个"O"表零对象，后一个"0"表零态射)；

(i)° 满态射的上核为$(O,0)$;

(ii) 零态射的核与上核都是同构(等价).

对预加法范畴不难验证如下结果,建议读者作为练习补出证明.

命题 4 设$\mathscr{C}$为预加法范畴,则

(i) $\mathscr{C}$中态射f为单态射的充分必要条件是$\mathrm{Ker}f=0$(即$(O,0)$);

(i)° $\mathscr{C}$中态射f为满态射的充分必要条件是$\mathrm{Coker}f=0$;

(ii) 对$\mathscr{C}$中任一对象A,记$\mathrm{End}_{\mathscr{C}}A=\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,A)$. 若$i\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B,A)$,$\pi\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$满足$\pi i=I_B$,则$i\pi$为$\mathrm{End}_{\mathscr{C}}A$中的幂等元(幂等态射)且$i=\mathrm{Ker}(I_A-i\pi)$;

(iii) 若$\alpha\in\mathrm{End}_{\mathscr{C}}A$为幂等元且$\mathrm{Ker}\alpha=(A_1,i_1)$,$\mathrm{Ker}(I_A-\alpha)=(A_2,i_2)$,则

$$(A,i_1,i_2)=A_1\amalg A_2\quad(\text{也记为}(A,i_j)=A_1\amalg A_2)$$

注 1 在命题 4,(iii)中,$\mathrm{Ker}\alpha$,$\mathrm{Ker}(I_A-\alpha)$的存在性是作为已知条件设下的.这是该结论的美中不足之处.本节末我们将定义比(预)加法范畴更强的 Abel 范畴,在该类范畴中任何态射都有核.从而命题 4,(iii)在 Abel 范畴中可以被完美成令人满意的结果.

下面我们对加法范畴给出 Hom 与直和、直积的关系.这些结果当然适用于模范畴.对⊗与直和、直积的关系,我们将只对模范畴给出.

先处理加法函子与有限直和(直积)的关系.我们来证明如下的重要结果.读者此时注意到 Hom,⊗都是模范畴间的加法函子将是有益的.

定理 3 设$\mathscr{C}$、$\mathscr{D}$为两个加法范畴,$F:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$为函子(共变或反变),则下述各点是等价的:

(i) F为加法函子;

(ii) F 保持有限直和,即

$$F(\coprod_{j=1}^{n} A_j) \simeq \coprod_{j=1}^{n} F(A_j), \quad \forall A_j \in \mathrm{Ob}\mathscr{C}, j=1,2,\cdots,n$$

(ii)° F 保持有限直积,即

$$F(\prod_{j=1}^{n} A_j) \simeq \prod_{j=1}^{n} F(A_j), \quad \forall A_j \in \mathrm{Ob}\mathscr{C}, j=1,2,\cdots,n$$

(iii) F 保持两项直和,即

$$F(A_1 \amalg A_2) \simeq F(A_1) \amalg F(A_2), \quad \forall A_1, A_2 \in \mathrm{Ob}\mathscr{C}$$

(iii)° F 保持两项直积,即

$$F(A_1 \prod A_2) \simeq F(A_1) \prod F(A_2), \quad \forall A_1, A_2 \in \mathrm{Ob}\mathscr{C}$$

(iv) $F(A \amalg A) \simeq F(A) \amalg F(A), \quad \forall A \in \mathrm{Ob}\mathscr{C}$

(iv)° $F(A \prod A) \simeq F(A) \prod F(A), \quad \forall A \in \mathrm{Ob}\mathscr{C}$

证 注意由推论 1 知(ii)与(ii)°、(iii)与(iii)°、(iv)与(iv)°都分别是等价的,同时,(ii)⇒(iii)⇒(iv)是当然的.因此,只需证(i)⇒(ii)与(iv)⇒(i).

另一方面 F 反变与 F 共变之证是对偶的(仍用推论 1).下面的证明中我们可设 F 为共变的函子.

(i)⇒(ii):因为函子 F 保持态射合成与恒等态射,又由 F 为加法函子知 F 又保持态射的加法与零态射.于是用定理 1 即可由(i)得(ii).

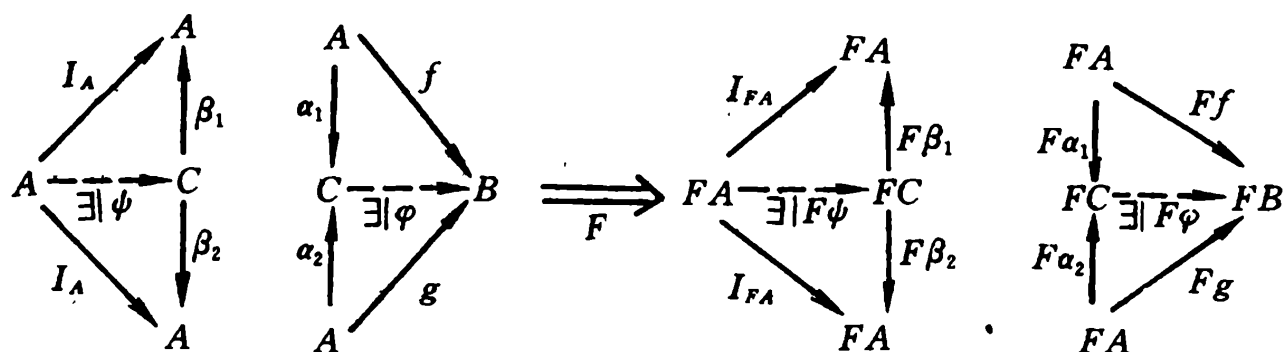
(iv)⇒(i):取 $(C, \alpha_j) = A \amalg A$.由推论 1 知 $(C, \beta_j) = A \prod A$.若(iv)成立,则有(为简单起见,均将“$\simeq$”视为“$=$”)

$$(FC, F\alpha_j) = FA \amalg FA (FA \text{ 表 } F(A), \text{下同})$$

由推论 1 知 $A \amalg A = A \prod A$,因此又有

$$(FC, F\beta_j) = FA \prod FA$$

于是对任意的 $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ 必有下面的 $\mathscr{C}$ 中交换图,以及经 F 作用后得到的 $\mathscr{D}$ 中的相应交换图:



由此并用推论 1、定理 1 之证法知下述四式成立(未用到 F 保持加法！这正是要证的)：

$$\psi=\alpha_1g_1+\alpha_2g_2\xlongequal[g_j=I_A]{}\alpha_1+\alpha_2 \tag{3}$$

$$\varphi=\tau_1\beta_1+\tau_2\beta_2\xlongequal[\tau_1=f,\tau_2=g]{}f\beta_1+g\beta_2 \tag{4}$$

$$F\psi=F\alpha_1+F\alpha_2(\text{同(3)之理}) \tag{5}$$

$$F\varphi=FfF\beta_1+FgF\beta_2(\text{同(4)之理}) \tag{6}$$

于是由(3)、(4)可得

$$\varphi\psi=(f\beta_1+g\beta_2)(\alpha_1+\alpha_2)\xlongequal[\text{定理 1}]{}f\beta_1\alpha_1+g\beta_2\alpha_2\xlongequal[\text{定理 1}]{}fI_A+gI_A$$

$$=f+g$$

由此知

$$F\varphi F\psi=F(\varphi\psi)=F(f+g) \tag{7}$$

另一方面，由(5)、(6)又可得

$$F\varphi F\psi=(FfF\beta_1+FgF\beta_2)(F\alpha_1+F\alpha_2)$$

$$\xlongequal[\substack{\text{用定理 1,}\\ \text{仿上}}]{}Ff+Fg \tag{8}$$

故由(7)、(8)即得

$$F(f+g)=Ff+Fg,\quad \forall f,g\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$$

即 F 为加法函子. □

定理 3 可用于解决本章 §5 遗留下的一个问题. 我们将此写成如下推论.

推论 3 设 F 为模范畴间的共变或反变函子,则本章§5,定义 1 与定义 1°中“加法(函子)”的条件省去后,所得定义仍分别与原定义等价.

证 只需证明去掉可加条件定义的右正合共变函子 F 一定保持二项直和,即可由定理 3 知 F 必为加法函子.左正合与反变的情况是类似的.

事实上,设在模范畴中 $B=A\oplus C$,由本章§4 的定理 1 知,必有可裂正合列

$$0\to A \underset{p}{\overset{i}{\rightleftarrows}} B\to C\to 0,\quad pi=I_A$$

用 F 作用后(注意 F“右正合”且共变)必得正合列

$$FA\underset{Fi}{\to}FB\to FC\to 0,$$

且由

$$FpFi=I_{FA}$$

知 Fi 为单同态.于是有可裂正合列

$$0\to FA \underset{Fp}{\overset{Fi}{\rightleftarrows}} FB\to FC\to 0, FpFi=I_{FA}.$$

再用一次本章§4 定理 1 即得

$$FB=F(A\oplus C)\simeq FA\oplus FC.\qquad\square$$

对预加法范畴,我们有如下的重要结果.由于模范畴为预加法范畴,这些结果对模范畴当然成立.

定理 4 设 $\mathscr{C}$ 为任一个预加法范畴,则

(i) $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\coprod_{j\in J}A_j,B)\underset{AG}{\overset{\theta}{\to}}\prod_{j\in J}\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A_j,B)$,

其中 $\theta(\varphi)=(\varphi\alpha_j)$, $\forall\varphi\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\coprod_{j\in J}A_j,B)$, α_j 为 $\coprod_{j\in J}A_j$ 的标准单射:$A_j\rightarrowtail\coprod_{j\in J}A_j$;

(i)° $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B,\prod_{j\in J}A_j)\underset{AG}{\overset{\theta_1}{\to}}\prod_{j\in J}\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B,A_j)$,

其中 $\theta_1(\varphi)=(\beta_j\varphi)$, $\forall\varphi\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B,\prod_{j\in J}A_j)$, β_j 为 $\prod_{j\in J}A_j$ 的标准投射:$\prod_{j\in J}A_j\twoheadrightarrow A_j$;

(ii) $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\coprod_{i\in I}A_i,\prod_{j\in J}B_j)\xrightarrow[\mathbb{AG}]{\sim}\prod_{\substack{i\in I\\ j\in J}}\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A_i,B_j)$.

证　显然(i)、(i)°⇒(ii). 又(i)与(i)°的证明方法是对偶的，因此只需证明(i).

首先注意，(i)中给出的 θ 显然为 Abel 群同态. 下面只需证 θ(作为群同态或映射)是满且单的.

事实上，任取

$$(f_j)\in\prod_{j\in J}\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A_j,B)$$

则 $f_j\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A_j,B)$, $\forall j\in J$. 由 $\mathscr{C}$ 中直和的泛性质(见上节定义 4)知，必有唯一的

$$\varphi\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\coprod_{j\in J}A_j,B)$$

使 $\varphi\alpha_j=f_j$, $\forall j\in J$, 因此有唯一的 φ 使 $\theta(\varphi)=(f_j)$. 故 θ 为满且单的. □

由上我们得到

推论 4　设 $\mathscr{C}$ 为预加法范畴，则

(i) $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(—,B)$ 为变直和为直积的反变函子；

(ii) $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B,—)$ 为变直积为直积(保直积)的共变函子；

(iii) $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(—,B)$ 与 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B,—)$ 都是加法函子，因此都保持有限直和与有限直积.

注 2　定理 4 中"$\xrightarrow[\mathbb{AG}]{\theta}$"表示从左到右有 Abel 群同构 θ. 这已蕴含了左端出现的 $\mathscr{C}$ 中之直和(直积)是存在的. 对模范畴，由于直和与直积都必然存在，"$\xrightarrow[\mathbb{AG}]{\sim}$"也可改为"$\underset{\mathbb{AG}}{\simeq}$". 对任意的范畴则改为"$\xrightarrow[\mathbb{S}]{\sim}$"(指左、右端集合等势，即 1—1 对应). 而对适当的双模范畴，定理 4 中的 Abel 群同构可以加强为适当的模同构(参看本章 §3，定理 12).

注 3　一般地，即使对 $\mathbb{AG}$(即 ${}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M}$)，当 $|J|=\infty$ 时，

$$\begin{array}{ccc}\operatorname{Hom}(\prod\limits_{j\in J}A_j,B) & \not\simeq & \coprod\limits_{j\in J}\operatorname{Hom}(A_j,B)\\ \not\wr\!\!\wr & & \\ \prod\limits_{j\in J}\operatorname{Hom}(A_j,B) & & \end{array}$$

因此 Hom 的第一变元为无穷直积时得不出类似于定理 4 的结果. 这由下例即知.

例 1 设 J 为正整数集, $R=\mathbb{Z}$, $\{p_1,p_2,\cdots,p_n,\cdots\}$ 为全体素数的集合(是无穷集). $A_j=\mathbb{Z}_{p_j}\equiv\mathbb{Z}/p_j\mathbb{Z}$, 而

$$B=\left(\prod_{j\in J}\mathbb{Z}_{p_j}\right)\Big/\left(\coprod_{j\in J}\mathbb{Z}_{p_j}\right)$$

任取 $j\in J$, 则 A_j 是由 $\bar{1}$(即 $\bmod p_j$ 运算下 1 的同余类)生成的 p_j 阶循环群. 因此对一切 $f\in\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(A_j,B)$, f 由 $f(\bar{1})$ 完全确定. 但 $f(\bar{0})=f(p_j\cdot\bar{1})$, 若 $f\neq 0$, 则 $f(\bar{0})$(在 B 中)必有无穷多个分量不为 0, 于是 f 不能是加群同态(因为不保持 0 的对应). 由此知 $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(A_j,B)=0$, $\forall j\in J$. 故

$$\coprod_{j\in J}\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(A_j,B)=0$$

$$\prod_{j\in J}\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(A_j,B)=0$$

但由 $\coprod\limits_{j\in J}\mathbb{Z}_{p_j}\subsetneqq\prod\limits_{j\in J}\mathbb{Z}_{p_j}$ 知, 标准同态

$$\prod_{j\in J}A_j\twoheadrightarrow B=(\prod_{j\in J}A_j)\Big/(\coprod_{j\in J}A_j)$$

即不为 0, 于是

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\prod_{j\in J}A_j,B)\neq 0$$

故上面两个非同构在本例中是必然的.

考虑对偶范畴, 用反证法可知: 一般地, 当 $|J|=\infty$ 时,

$$\begin{array}{ccc}\operatorname{Hom}(B,\coprod\limits_{j\in J}A_j) & \not\simeq & \coprod\limits_{j\in J}\operatorname{Hom}(B,A_j)\\ \not\wr\!\!\wr & & \\ \prod\limits_{j\in J}\operatorname{Hom}(B,A_j) & & \end{array}$$

事实上, 若这两处"$\not\simeq$"改为有一个总是同构, 表明该同构对一切预加法范畴都成立, 则由对偶原理知不可能出现例 1 中的反

例. 当然，也可用下面两例分别说明它们不可能总是同构.

例 2 取 $B=R$，在 ${}_R\mathfrak{M}$ 中

$$\mathrm{Hom}_R(B,\coprod_{j\in J}A_j)=\mathrm{Hom}_R(R,\coprod_{j\in J}A_j)\simeq\coprod_{j\in J}A_j$$

而

$$\coprod_{j\in J}\mathrm{Hom}_R(B,A_j)=\coprod_{j\in J}\mathrm{Hom}_R(R,A_j)\simeq\coprod_{j\in J}A_j$$

在 $|J|=\infty$ 时二者一般不会同构.

例 3 将例 1 中的 B 改为

$$B=\coprod_{j\in J}\mathbb{Z}_{p_j},$$

A_j, J, R 等仍同例 1 的规定. 易见($m\neq n$ 时，考虑零元素的对应)：

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{p_n},\mathbb{Z}_{p_m})\simeq\begin{cases}\mathbb{Z}_{p_n}, & 当\ m=n\ 时\\ 0, & 当\ m\neq n\ 时\end{cases}$$

于是

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(B,\coprod_{j\in J}A_j)=\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\coprod_{j\in J}A_j,\coprod_{j\in J}A_j)$$

$$\underset{定理4(i)}{\simeq}\prod_{i\in J}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A_i,\coprod_{j\in J}A_j)=\prod_{i\in J}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{p_i},\coprod_{j\in J}\mathbb{Z}_{p_j})$$

对任意的 $f\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{p_i},\coprod_{j\in J}\mathbb{Z}_{p_j})$，

$$p_if(\bar{1})=f(p_i\cdot\bar{1})=f(\bar{0})=\bar{0}$$

因此，$f\neq0$ 时必然有 $\mathrm{Im}f=\mathbb{Z}_{p_i}$(否则 $f(\bar{0})=\bar{0}$ 不会成立). 由此可知

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{p_i},\coprod_{j\in J}\mathbb{Z}_{p_j})\simeq\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{p_i},\mathbb{Z}_{p_i})\simeq\mathbb{Z}_{p_i}$$

故

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(B,\coprod_{j\in J}A_j)\simeq\prod_{i\in J}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{p_i},\coprod_{j\in J}\mathbb{Z}_{p_j})\simeq\prod_{j\in J}\mathbb{Z}_{p_j}$$

但

$$\coprod_{j\in J}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(B,A_j)=\coprod_{j\in J}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\coprod_{j\in J}\mathbb{Z}_{p_i},\mathbb{Z}_{p_j})$$

$$\underset{定理4(i)}{\simeq}\coprod_{j\in J}\prod_{i\in J}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{p_i},\mathbb{Z}_{p_j})\simeq\coprod_{j\in J}\mathbb{Z}_{p_j}$$

二者不能同构. 因此，一般地，

$$\mathrm{Hom}(B,\coprod_{j\in J}A_j)\not\simeq\coprod_{j\in J}\mathrm{Hom}(B,A_j)$$

对函子$\otimes$($A\underset{R}{\otimes}-$,与$-\underset{R}{\otimes}B$),我们已经知道它们都是加法函子.因此由定理 3 知:$A\underset{R}{\otimes}-$与$-\underset{R}{\otimes}B$ 都保持有限直和(有限直积).下面我们来给出更一般的结果.当 R 为交换环或对适当的双模范畴,下面结果中的AG 同构可以加强为适当的模同构.

定理 5　设 R 为任意环,则

(i) $A\in\mathfrak{M}_R, B_j\in{}_R\mathfrak{M}, j\in J$ 时

$$A\underset{R}{\otimes}\coprod_{j\in J}B_j\ \underset{AG}{\overset{\theta}{\simeq}}\ \coprod_{j\in J}(A\underset{R}{\otimes}B_j)$$

其中 $\theta(a\otimes(b_j))=(a\otimes b_j), \forall a\in A, b_j\in B_j, j\in J$;

(ii) $A_j\in\mathfrak{M}_R, j\in J. B\in{}_R\mathfrak{M}$ 时

$$(\coprod_{j\in J}A_j)\underset{R}{\otimes}B\ \underset{AG}{\overset{\theta_1}{\simeq}}\ \coprod_{j\in J}(A_j\underset{R}{\otimes}B)$$

其中 $\theta_1((a_j)\otimes b)=(a_j\otimes b), \forall a_j\in A_j, j\in J, b\in B$;

(iii) $A_i\in\mathfrak{M}_R, i\in I, B_j\in{}_R\mathfrak{M}, j\in J$ 时

$$(\coprod_{i\in I}A_i)\underset{R}{\otimes}(\coprod_{j\in J}B_j)\underset{AG}{\simeq}\coprod_{\substack{i\in I\\ j\in J}}(A_i\underset{R}{\otimes}B_j)$$

当 R 为交换环时,上述三个同构都是 R-模同构.

证　(iii)⇒(i)、(ii)是当然的.这里只需证(iii).

令 $A=\coprod_{i\in I}A_i$ 的标准单射集为$\{\lambda_i\}$,标准投射集为$\{p_i\}$;$B=\coprod_{j\in J}B_j$ 的标准单射集为$\{\alpha_j\}$,标准投射集为$\{\beta_j\}$.由上节命题 1 知

$$p_i\lambda_k=\delta_{ik}I_{A_k},\qquad \sum_{i\in I}\lambda_i p_i=I_A$$

$$\beta_j\alpha_k=\delta_{jk}I_{B_k},\qquad \sum_{j\in J}\alpha_j\beta_j=I_B$$

由此知,同态列

$$A_{i'}\underset{R}{\otimes}B_{j'}\xrightarrow{\lambda_{i'}\otimes\alpha_{j'}}A\underset{R}{\otimes}B\xrightarrow{p_i\otimes\beta_j}A_i\underset{R}{\otimes}B_j$$

中的同态满足

$$(p_i\otimes\beta_j)(\lambda_{i'}\otimes\alpha_{j'})=\delta_{(i,i')(j,j')}I_{A_{i'}\otimes B_{j'}}$$

$$\sum_{\substack{i\in I\\ j\in J}}(\lambda_i\otimes\alpha_j)(p_i\otimes\beta_j)=I_{A\underset{R}{\otimes}B}$$

于是由上节命题 1 即知有 Abel 群同构

$$A \underset{R}{\otimes} B \simeq \coprod_{\substack{i\in I\\ j\in J}} A_i \underset{R}{\otimes} B_j$$

当 R 为交换环时,此同构显然为 R - 模同构. □

注 4 一般地,当 $|J| = \infty$ 时,

$$\coprod_{j\in J}(A \underset{R}{\otimes} B_j) \not\simeq A \underset{R}{\otimes} \prod_{j\in J} B_j \not\simeq \prod_{j\in J}(A \underset{R}{\otimes} B_j)$$

$$\coprod_{j\in J}(A_j \underset{R}{\otimes} B) \not\simeq (\prod_{j\in J} A_j) \underset{R}{\otimes} B \not\simeq \prod_{j\in J}(A_j \underset{R}{\otimes} B)$$

因此⊗与Ⅱ的关系比较复杂.

为说明这些,只需对交换环 R(此时 $X \underset{R}{\otimes} Y \simeq Y \underset{R}{\otimes} X$). 找出上行的例子,下行也就不说明了.

例 4 令 $R = \mathbb{Z}$, p 为一个素数, $A = \mathbb{Q}$, $B_j = \mathbb{Z}_{p^j}$, $j = 1, 2, \cdots$. 对任意的 $a \in \mathbb{Q}$, 可记 $a = \frac{r}{s} = \frac{rp^j}{sp^j}$, $r, s \in \mathbb{Z}$, 于是

$$a \otimes b_j = \frac{r}{sp^j} \otimes p^j b_j = 0, \quad \forall\, b_j \in B_j = \mathbb{Z}_{p^j}$$

因此 $A \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} B_j = 0$. 由此知

$$\coprod_{j\in J}(A \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} B_j) = 0, \quad \prod_{j\in J}(A \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} B_j) = 0$$

但显然地

$$A \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} (\prod_{j\in J} B_j) \neq 0$$

这说明上行中的两个非同构是可能发生的.

在结束本节前,我们再介绍一种特殊的加法范畴——Abel 范畴.

定义 3 设 $\mathscr{C}$ 为一个加法范畴,若 $\mathscr{C}$ 又满足下述各条件:

(i) $\mathscr{C}$ 中任何态射都有核与上核;

(ii) $\mathscr{C}$ 中任何单态射都是其上核的核,任何满态射都是其核的上核;

(iii) $\mathscr{C}$ 中任何态射 σ 都可分解成一个单态射 η 与一个满态射 π 之积(合成): $\sigma = \eta\pi$, 此式称为 σ 的标准分解式,则称 $\mathscr{C}$ 为一个

Abel 范畴.

注意:"Abel 群范畴"即$\mathbb{A}\mathrm{G}$,是指一个特定的范畴,"Abel 范畴"是一类范畴的总称二者不可混为一谈.事实上$\mathbb{A}\mathrm{G}$只是一个特定的 Abel 范畴(见下面的例 5).

由定义 3 不难看出下述结论是成立的.

命题 5 设$\mathscr{C}$为 Abel 范畴,则$\mathscr{C}$的反范畴$\mathscr{C}^o$也是 Abel 范畴.因此,对一切 Abel 范畴都成立的命题,其对偶命题也对一切 Abel 范畴成立.

我们来看几个例子.

例 5 对任一环 R,${}_R\mathfrak{M}$($\mathfrak{M}_R$)必为 Abel 范畴,因此,Abel 群范畴(即${}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M}$)也是 Abel 范畴.

只需验证定义 3 中的条件(iii),其余都是已知或显见的.事实上,对任一个 $\sigma\in \mathrm{Hom}_R(A,B)$必有如下的 R-模同态交换图

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\pi} & \mathrm{Im}\sigma \\ & \searrow^{\sigma} & \downarrow{\eta} \\ & & B \end{array} \qquad \text{即}\quad \sigma=\eta\pi,$$

其中 $\pi(a)=\sigma(a)$, $\forall a\in A$,当 σ 为满同态时$\sigma=\pi$, $\eta=I_B$.当 σ 不是满同态时$\sigma\neq\pi$, η 为 $\mathrm{Im}\sigma$ 在B 中的嵌入同态.

例 6 自由 Abel 群组成的范畴$\mathbb{F}\mathrm{AG}$虽是加法范畴但非 Abel 范畴.比如$\mathbb{Z}\in\mathrm{Ob}\mathbb{F}\mathrm{AG}$(对加法).定义 $f(n)=2n$, $\forall n\in\mathbb{Z}$,则得群同态 $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$.显然 f 是单同态但非满同态,因此不是$\mathbb{Z}$到$\mathbb{Z}$的同构.我们记 $\sigma=\mathrm{Coker}f$,则 $\sigma f=0$,于是

$$\sigma f(n)=\sigma(2n)=2n\sigma(1)=0$$

故 $\sigma(1)=0$,因此 $\sigma=0$.如果$\mathbb{F}\mathrm{AG}$为 Abel 范畴,则由定义 3 之条

件(ii), f 应为 $\sigma=0$ 的核. 而由命题 3(ii), $\sigma=0$ 的核应为同构. 这就得出了矛盾. 故$\mathbb{FAG}$ 非 Abel 范畴. 但显然它是加法范畴.

例 7 环范畴$\mathbb{R}$ing(甚至域范畴$\mathbb{F}$)是有零对象范畴但非预加法范畴, 因此非加法范畴, 更非 Abel 范畴.

事实上, 在$\mathbb{R}$ing 中, 两个非零环之间的态射(保单位元的同态)不可能为 0(同态). 因此它们间的态射集不可能为 Abel 加群. 由此知, $\mathbb{R}$ing 非预加法范畴.

例 8 作一个范畴 $\mathscr{C}_2$ 使 $\mathrm{Ob}\mathscr{C}_2=\{0,*\}$(只有两个对象)且

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_2}(*,*)=\mathbb{Z},\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_2}(0,0)=\{0\}$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_2}(*,0)=\{0\},\quad \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_2}(0,*)=\{0\}$$

态射合成即整数的乘法. 容易看出, $\mathscr{C}_2$ 是预加法范畴但非加法范畴.

事实上, 只需证 $\mathscr{C}_2$ 中 $*\amalg *$ 不存在即可. 我们先反设 $(*\amalg *,\alpha_j)$存在, 则 $*\amalg *=*$ 或 0. 在 $*\amalg *=*$ 时, 由直和泛性质(本章§6, 定义 4)知(取 $X=*, f_1, f_2\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_2}(*,*)$), 必有唯一的 $\varphi\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_1}(*,*)$使 $\varphi\alpha_j=f_j$. 由于 $\varphi,\alpha_j,f_j\in\mathbb{Z}$, 必有 $\alpha_j=\pm1$(要对任意的 f_j, $\alpha_j\mid f_j$). 取 $f_2\neq\pm f_1$ 即得出矛盾. 在 $*\amalg *=0$ 时, 用此泛性质(仍取 $X=*, f_1, f_2\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_2}(*,*)$), 注意 $\alpha_1=\alpha_2=0$, 由 f_j 的任意性知 φ 不可能使 $\varphi\alpha_j=f_j$ 总是成立的. 由此即知 $\mathscr{C}_2$ 非加法范畴.

例 9 设 $\mathrm{Ob}\mathscr{C}_\Delta=\{0,A_1,A_2\}$, 态射集为

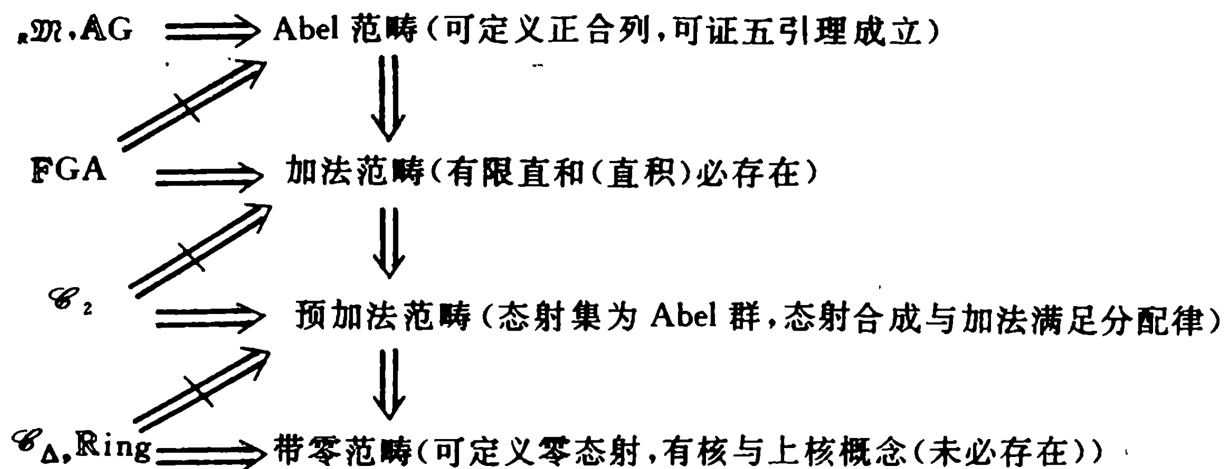
$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_\Delta}(A_i,A_j)=\{n\in\mathbb{Z}\mid n\geqslant0\},\quad i,j=1,2$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_\Delta}(0,A_j)=\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A_j,0)=\{0\},\quad j=1,2$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_\Delta}(0,0)=\{0\}$$

态射合成按数的乘法来定义, 则 $\mathscr{C}_\Delta$ 为一个有零对象的范畴——带零范畴, 但显然非预加法范畴.

为了方便读者,我们将已介绍的四种范畴类型的蕴含关系列在下面,其中"⟹"表"是","⇏"表"不是".小括号内简注一下该类范畴的常用性质.



这四种类型的范畴都是关于对偶封闭的.即,反范畴(对偶范畴)仍是同类型的范畴.因此,对一切 Abel 范畴(一切加法范畴,一切预加法范畴、一切带零范畴)都成立的命题,其对偶命题仍成立,不必再证.

习　题　1.7

1. 设 A 为有限生成左 R-模,B_j 也是左 R-模,$j\in J$. 证明

$$\mathrm{Hom}_R(A,\coprod_{j\in J}B_j)\underset{AG}{\simeq}\coprod_{j\in J}\mathrm{Hom}_R(A,B_j)$$

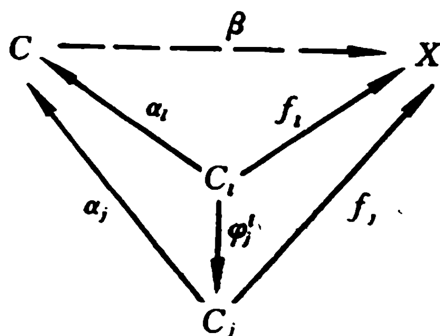
(提示:设 $A=\langle a_1,a_2,\cdots,a_n\rangle$,则任给 $f\in\mathrm{Hom}_R(A,X)$,f 由 $f(a_1)$,$f(a_2)$,$\cdots$,$f(a_n)$ 唯一确定.注意,顺便说一下,由于 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 未必为 R-线性无关的,即 A 中元素表成它们的 R-线性组合式未必唯一,因此给出 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,令 $a_j\longmapsto x_j$,$j=1,2,\cdots,n$,未必能确定一个 $f\in\mathrm{Hom}_R(A,X)$).

2. 证明:对模范畴,函子 Hom 保持有限直和.

3. 给出定理 5 的另一证法.

4. 设 J 为一偏序集按本章§1例2的办法作成的范畴.$F:J\to\mathscr{C}$ 为 J 到范畴 $\mathscr{C}$ 的一个共变函子,且记 $F(j)=C_j$,$\forall j\in J$.若 $C\in\mathrm{Ob}\mathscr{C}$ 且有 $\alpha_j\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C_j,C)$ 使 $\alpha_l=\alpha_j\varphi_j^l$,其中 $\varphi_j^l=F(i_j^l)$,i_j^l 如§1例2所示($l\leqslant j$ 时 $\mathrm{Hom}_J(l,j)$

$=\{i_j^l\}$, $\forall\, l\leqslant j$, $l,j\in J$). 同时(C,α_j)满足如下泛性质: $\forall\, X\in \mathrm{Ob}\mathscr{C}$, $f_j\in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C_j,X)$, 如果 $l\leqslant j$ 时都有 $f_l=f_j\varphi_j^l$, 则有唯一的 $\beta\in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C,X)$使下图为交换图



则称 C 为$\{C_j\}$的正向极限(direct limit)并记为 $C=\varinjlim C_j$.

证明(i)对一切偏序集 J, $\varinjlim C_j$ 如存在,则在同构意义下唯一;

(ii) 对${}_R\mathfrak{M}$ 证明:对任何偏序集 J, $\varinjlim C_j$ 必存在;

(iii) 证明$\coprod_{j\in J} C_j$ 为$\varinjlim C_j$ 的特例.

(提示(i)用始对象,(ii)令 $S=<\{\lambda_j\varphi_j^l a_l-\lambda_l a_l\}>$,其中 $a_l\in C_l$, $\lambda_j: C_j \rightarrowtail \coprod_{j\in J} C_j$ 为标准单射,取$\varinjlim C_j=(\coprod_{j\in J} C_j)/S$, (iii)规定 J 为平庸偏序集,即"$l\leqslant j\Leftrightarrow l=j$".)

5. 对偶于上题给出反向极限(inverse limit)的定义,并证明上题中三个对偶的结论.

第二章　特殊模与相应的维数

在本章中我们详细地介绍环模中最常用也是最基本的三大模类:投射模、内射模与平坦模.建议读者注意体会投射模与内射模的丰富的对偶性,以及内射模与平坦模的内在联系.这三种模类是同调代数与模论中的主要研究对象,在代数几何,代数K-理论、代数数论以及群表示论中也有重要应用.利用模对这三类模的分解,本章给出了模的三种维数,即三种同调不变量.在此基础上给出环的同调维数——整体维数与弱维数,它们在刻画环性质上已起到相当大的作用.

本章中的模通常都设为左模,右模的相应概念与结果是平行的.

§1　投射模与投射维数

先从自由模谈起,再将自由模的概念进行推广得出投射模的定义与特征性质.为方便起见,对模范畴中的直和,我们将同时使用$\amalg$与$\oplus$两种记号.

定义1　设R为任意环,$F\in{}_R\mathfrak{M}$.若F中有R-线性无关子集$\{e_j\mid j\in J\}$(即任给此集的有限个元素都找不到不全为0的一组R元素将它们左R-线性组合为0)使F中任一元素都可表为有限个e_j的R-线性组合,则称$\{e_j\mid j\in J\}$为F的**基**(base,basis)F称为**自由**(**左**R-)**模**(free　left R-module),记为$F\in\mathrm{Free}_R\mathfrak{M}$.

由定义不难直接验证如下结果.

命题1　设R为任意环,则在${}_R\mathfrak{M}$中下述各点是等价的:

(i) 存在$\{e_j \mid j \in J\} \subset F$使$F$为以$\{e_j \mid j \in J\}$为基的自由模；

(ii) 作为左R-模，$F \simeq \coprod_{j \in J} R \equiv R^{(J)}$；

(iii) 对任意$M \in {}_R\mathfrak{M}$以及任意的$\{m_j \mid j \in J\} \subset M$，有唯一的$f \in \mathrm{Hom}_R(F, M)$使

$$f(e_j) = m_j, \quad \forall j \in J$$

命题 2　设R为任意环，则在${}_R\mathfrak{M}$中下述各点成立：

(i) 若F是自由左R-模，则以F作第三项的任意短正合列

$$0 \to A \to B \to F \to 0$$

都是可裂的，因此，作为左R-模，

$$B \simeq A \oplus F$$

(ii) 对任意的$M \in {}_R\mathfrak{M}$，必有自由左R-模F使有满R-模同态$f: F \twoheadrightarrow M$；

(iii) 若F为自由左R-模，则$\mathrm{Hom}_R(F, —)$为正合共变函子；

(iv) 若F为自由左R-模，$M \xrightarrow{f} N$为满R-模同态，$g: F \to N$为任意的R-模同态，则有$h \in \mathrm{Hom}_R(F, M)$使下图为行正合交换图；

$$\begin{array}{ccccc} & & F & & \\ & \overset{h}{\swarrow} & \downarrow g & & \\ M & \xrightarrow{f} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

(v) 设F_1, F_2为交换环R上分别以$\{e_i \mid i \in I\}$，$\{f_j \mid j \in J\}$为

基的自由 R－模，则 $F_1 \underset{R}{\otimes} F_2$ 为有基 $\{e_i \otimes f_j \mid i \in I, j \in J\}$ 的自由 R－模.

定义 2 设 $M \in {}_R\mathfrak{M}$，$F_j \in \mathrm{Free}_R\mathfrak{M}$，$j = 1, 2, \cdots, n, \cdots$，则左 R－模正合列

$$\cdots \to F_n \to F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to M \to 0$$

称为 M 的一个**自由分解**(free resolution).

我们用如下命题用以说明自由分解的存在性.

命题 3 设 R 为任意环，则每一个(左)R－模 M 都有自由分解.

证 注意 M 必有生成系(比如 M 的全体元素的集合即是)，可设 $\{m_j \mid j \in J\}$ 为 M 的一组生成系. 以 $\{x_j \mid j \in J\}$ 作基可得自由左 R－模 F_0. 定义 $d_0 : x_j \mapsto e_j$，$\forall j \in J$，则得一确定的 R－模满同态 $d_0 : F_0 \twoheadrightarrow M$. 对 $\mathrm{Ker}d_0$ 使用这一过程，又得自由左 R－模 F_1，以及 R－模满同态 $\partial_1 : F_1 \twoheadrightarrow \mathrm{Ker}d_0$，……，依此类推. 再记 $d_j = i_{j-1}\partial_j$，其中 i_{j-1} 表嵌入(包含)同态 $\mathrm{Ker}\partial_{j-1} \rightarrowtail F_{j-1}$，$j = 1, 2, \cdots$，($i_0 : \mathrm{Ker}d_0 \rightarrowtail F_0$)，则有交换图

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots \longrightarrow & F_3 & \xrightarrow{d_3} & F_2 & \xrightarrow{d_2} & F_1 & \xrightarrow{d_1} & F_0 & \xrightarrow{d_0} & M & \longrightarrow 0 \\
& {\scriptstyle\partial_3}\searrow & \nearrow{\scriptstyle i_2} & {\scriptstyle\partial_2}\searrow & \nearrow{\scriptstyle i_1} & {\scriptstyle\partial_1}\searrow & \nearrow{\scriptstyle i_0} & & & & \\
& & \mathrm{Ker}\partial_2 & & \mathrm{Ker}\partial_1 & & \mathrm{Ker}d_0 & & & &
\end{array}$$

由于 i_l 都是单同态，必有

$$\mathrm{Im}d_j = \mathrm{Im}\partial_j = \mathrm{Ker}\partial_{j-1} = \mathrm{Ker}d_{j-1}, \quad j = 1, 2, \cdots$$

于是我们得到 M 的自由分解

$$\cdots \to F_3 \xrightarrow{d_3} F_2 \xrightarrow{d_2} F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \overset{d_0}{\twoheadrightarrow} M \to 0$$

作为自由模的推广，现在我们给出投射模的概念. □

定义 3 设 $M \in {}_R\mathfrak{M}$. 若有 $N \in {}_R\mathfrak{M}$ 使 $M \oplus N$ 为自由左 R－

模，则称 M 为投射左 R－模（projective left R－module），记为 $M\in P_R\mathfrak{M}$ 或 $M\in \mathrm{Proj}_R\mathfrak{M}$. 即，投射 R－模为自由 R－模的直和项.

有时也称上述 N 为 M 的自由补，当然 N 也是投射左 R－模.

显然，自由 R－模必是投射 R－模. 但反过来不真(见下例). 因此自由模是投射模的“真子类”(特殊的投射模)，投射模是自由模的“真推广”.

例 1 取 $R=\mathbb{Z}_6$，则 $|R|=6$，R 为自由 R－模，任何自由 R－模的元素个数必为 6 的倍数或无穷(见命题 1). 又 $\mathbb{Z}_2$、$\mathbb{Z}_3$ 都是 R－模且作为 R－模有

$$R=\mathbb{Z}_6\simeq\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_3$$

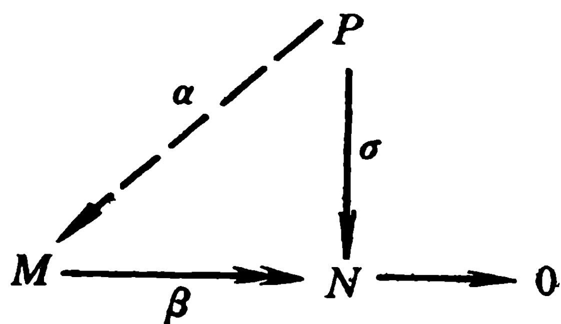
但 $|\mathbb{Z}_2|=2$，$|\mathbb{Z}_3|=3$，于是 $\mathbb{Z}_2$ 与 $\mathbb{Z}_3$ 都是投射 R－模但都不是自由 R－模.

到此自然要问：投射模作为自由模的推广保留了自由模的哪些性质？我们列出几条重要的如下，它们都是投射模的特征性质.

定理 1 (投射模的特征定理). 设 R 为任一环，$P\in {}_R\mathfrak{M}$，则下述各点是等价的：

(i) (直和项定义) P 为投射左 R－模. 即有 $Q\in {}_R\mathfrak{M}$ 使 $P\oplus Q=F$ 为自由左 R－模；

(ii) (提升(lifting)性质) P 到任意的 $M\in {}_R\mathfrak{M}$ 之商模的左 R－模同态可提升为 P 到 M 的左 R－模同态. 即在 ${}_R\mathfrak{M}$ 中对任意的行正合图



必有左 R－模同态 α 使成交换图；

(iii) $\mathrm{Hom}_R(P,-)$为正合共变函子；

(iv) 对任意的 $M\in{}_R\mathfrak{M}$，P 必为 M－投射的；

(v) (可裂性). ${}_R\mathfrak{M}$ 中任何满同态 $A\xrightarrow{\rho}P$ 必为可裂的，即必有左 R－模同态 $\delta:P\to A$ 使 $\rho\delta=I_P$(即满同态 ρ 必有右逆)，因此 $A\simeq P\oplus\mathrm{Ker}\rho$；

(vi) 对 ${}_R\mathfrak{M}$ 中任何短正合列

$$0\to A\to B\to P\to 0$$

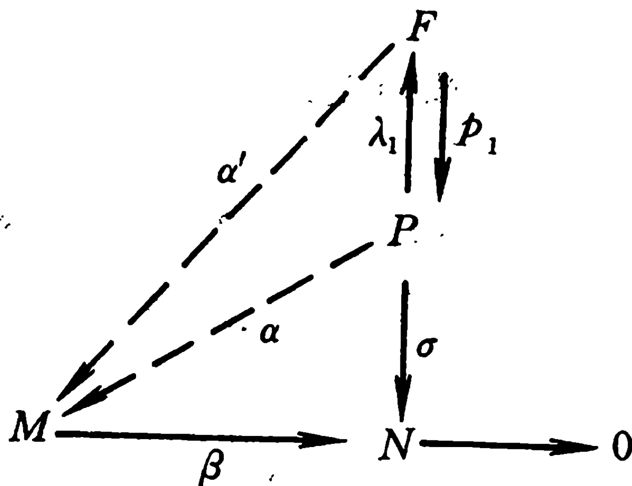
必有 $B\simeq P\oplus A$；

(vii) (对偶基性质) 存在 $\{p_j\mid j\in J\}\subseteq P$，$\{f_j\mid j\in J\}\subseteq P^*\equiv\mathrm{Hom}_R(P,R)$使对任意的 $p\in P$，$|\{j\mid f_j(p)\neq 0\}|<\infty$且

$$p=\sum_{j\in J}f_j(p)p_j \qquad (\text{有限和!})$$

称$\{p_j\mid j\in J\}$与$\{f_j\mid j\in J\}$为 P 的**对偶基**(dual basis).

证(i)⇒(ii)：设 $P\oplus Q=F$ 是有基$\{e_j\mid j\in J\}$的自由左 R－模，则有图



其中 β,σ 为(ii)中任取的左 R－模同态，p_1 为 F 到 P 的标准投射，λ_1 为 P 到 F 的标准单射.

记 $n_j=\sigma p_1(e_j)\ \forall j\in J$. 由 β 满知必有$\{m_j\mid j\in J\}\subseteq M$ 使 $\beta(m_j)=n_j$，$\forall j\in J$. 令 $\alpha'(e_j)=m_j$，$\forall j\in J$. 由 F 为自由的且$\{e_j\mid$

$j\in J\}$为基知 α'给出一个确定的左R－模同态 $\alpha':F\to M$. 于是

$$\beta\alpha'=\sigma p_1$$

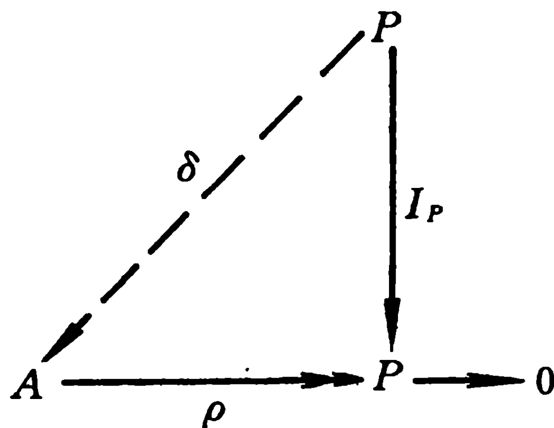
再令 $\alpha=\alpha'\lambda_1$, 则 $\alpha\in \mathrm{Hom}_R(P,M)$且

$$\beta\alpha=\beta\alpha'\lambda_1=\sigma p_1\lambda_1=\sigma I_P=\sigma$$

(ii)⇒(iii): 由(ii)知 $\mathrm{Hom}_R(P,—)$右正合. 但由上章§6 知 Hom 函子必是左正合的, 因此 $\mathrm{Hom}(P,—)$为正合的.

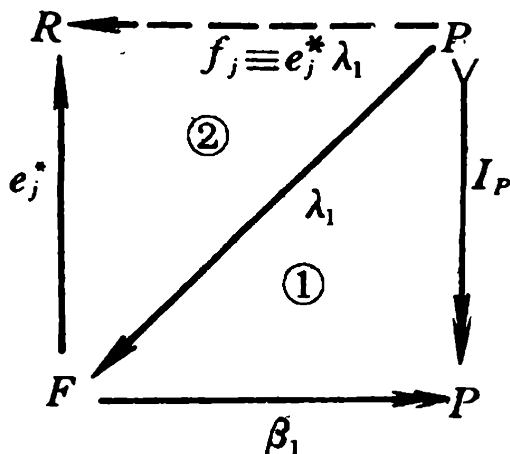
(iii)⇒(iv)是当然的(由上章§5, M－投射模的定义).

(iv)⇒(v): 由于 P 对任意的$M\in {}_R\mathfrak{M}$ 都是 M－投射的, 取 $M=A$, 则有 $\delta\in \mathrm{Hom}_R(P,A)$使行正合图为交换图. 即 $\rho\delta=I_P$



(v)⇒(vi): 由上章§4, 定理 1 即得.

(vi)⇒(vii): 设$\{p_j\mid j\in J\}$为 P 的生成系. 可取(vi)中的 $B=F$ 为自由R－模, $\{e_j\mid j\in J\}$为 F 之基. 于是 $F\simeq\coprod_{j\in J}R$. 定义 $\beta_1:F\twoheadrightarrow P$ 使$\beta_1(e_j)=p_j$, $\forall j\in J$. 考察下图



由(vi)知,P 为 F 的直和项,因此有 λ_1 使①交换. 再令 $e_j^*: F \to R$ 使

$$e_j^*(\sum_{<\infty} r_i e_i) = r_j \quad \forall x = \sum_{<\infty} r_i e_i \in F$$

(e_j^* 相当于取 $x \in F$ 在基 $\{e_j\}$ 下的相应坐标,因此 $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$).
取 $f_j = e_j^* \lambda_1$,则 $f_j \in \mathrm{Hom}_R(P, R)$ 且使②交换.

对任意的 $p \in P$,

$$p = I_P(p) \xlongequal[\text{①交换}]{} \beta_1 \lambda_1(p) \xlongequal[\lambda_1(p)\in F]{} \beta_1(\sum_{<\infty} e_j^*(\lambda_1(p)) e_j$$

$$\xlongequal[e_j^*(\lambda_1(p))\in R]{} \sum_{<\infty}(e_j^*(\lambda_1(p))\beta_1(e_j) \xlongequal[\substack{\beta_1(e_j)=p_j \\ f_j = e_j^* \lambda_1}]{} \sum_{<\infty} f_j(p) p_j$$

(vii)⇒(i):设(vii)成立,则有有基 $\{e_j \mid j \in J\}$ 的自由 R-模 F. 因此可定义 $\beta_1 \in \mathrm{Hom}_R(F, P)$ 使 $\beta_1(e_j) = p_j$. $\forall j \in J$. 显然 β_1 为满同态. 再由

$$\lambda_1(p) = \lambda_1(\sum_{<\infty} f_j(p) p_j) = \sum_{<\infty} f_j(p) e_j$$

定义 $\lambda_1: P \to F$. 由于 $f_j(0)=0$,因此 $\lambda_1(0)=0$. 于是 λ_1 是完全确定的 R-模同态. 易看出 $\beta_1 \lambda_1 = I_P$,因此(由 β_1 满)知

$$F \simeq P \oplus \mathrm{Ker}\beta_1$$

□

由此知 P 为投射的.

由定理 1 立得如下推论.

推论 1 设 $P \in {}_R\mathfrak{M}$,则下述各点等价:

(i) P 为有限生成投射 R-模(常记为 $P \in \mathrm{f.g.P}_R\mathfrak{M}$);

(ii) 有有限生成自由 R-模 R^n 与 $Q \in {}_R\mathfrak{M}$ 使

$$R^n \simeq P \oplus Q$$

(iii) 有有限生成自由 R-模 F 与 $Q \in \mathrm{f.g.}{}_R\mathfrak{M}$ 使

$$F \simeq P \oplus Q$$

(iv) P 有一对有限的对偶基 $\{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$ 与 $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ 使 P 的任一元素 p 都可表为

$$p=\sum_{j=1}^{n}f_j(p)p_j$$

容易看出:投射模的对偶基特征正是线性空间对偶基性质的推广.

推论 2 设 $A<B\in{}_R\mathfrak{M}$, $B/A\in \mathrm{P}_R\mathfrak{M}$,则 A 为 B 的直和项.

推论 3 设 $P\in \mathrm{P}_R\mathfrak{M}$, $M\simeq P$(作为左 R-模),则 $M\in \mathrm{P}_R\mathfrak{M}$.

定理 1 已彻底解决了 $\mathrm{Hom}_R(P,-)$正合的特征刻画问题.下面再来讨论投射模类对$\coprod$以及$\otimes$"运算"的封闭性.先来证明

定理 2 设 $P\simeq \coprod_{j\in J}P_j\in{}_R\mathfrak{M}$,则 $P\in \mathrm{P}_R\mathfrak{M}$ 的充分必要条件是 $P_j\in \mathrm{P}_R\mathfrak{M}$, $\forall j\in J$.

因此,投射模类对直和与取直和项都是封闭的.

证 在下面的证明中,我们将使用上章§6中关于直和(直积)在同构意义的结合性与交换性结果.

$\Rightarrow$:设 $P\in \mathrm{P}_R\mathfrak{M}$,则有 $Q\in{}_R\mathfrak{M}$ 使 $P\oplus Q=F\in \mathrm{Free}_R\mathfrak{M}$ 但

$$F=P\oplus Q\simeq P_j\oplus((\coprod_{\substack{i\in J\\ i\neq j}}P_i)\oplus Q)$$

因此,$P_j\in \mathrm{P}_R\mathfrak{M}$, $\forall j\in J$.

$\Leftarrow$:设 $P_j\in \mathrm{P}_R\mathfrak{M}$, $\forall j\in J$.则有 $Q_j\in{}_R\mathfrak{M}$ 使

$$P_j\oplus Q_j=F_j\in \mathrm{Free}_R\mathfrak{M},\quad \forall j\in J$$

于是

$$(\coprod_{j\in J}P_j)\oplus(\coprod_{j\in J}Q_j)\simeq\coprod_{j\in J}F_j\in \mathrm{Free}_R\mathfrak{M}$$

(注意自由模的直和显然仍为自由的),故 $P=\coprod_{j\in J}P_j\in \mathrm{P}_R\mathfrak{M}$.

□

注意到

$$\coprod_{j\in J}P_j\simeq(\coprod_{\substack{i\in J\\ i\neq j}}P_i)\oplus P_j$$

用上面的证法可得

命题 4 设 $P=\coprod_{j\in J}P_j\in \mathrm{P}_R\mathfrak{M}$,则 $P_j\in \mathrm{P}_R\mathfrak{M}$, $\forall j\in J$.

注 1 S. U. Chase 在 1960 年即已证出如下结果(见[C,60]):

设 R 为交换环,则任意多个投射 R－模之直积仍为投射 R－模的充分必要条件是 R 为 Artin 环(理想满足降链条件(DCC)的环).

由此知,命题 4 之逆不能成立,因为非 Artin 交换环是存在的,比如整数环$\mathbb{Z}$ 就不是 Artin 环.[C,60]中还得到了如下结果:设 R 为环,则任意多个投射左 R－模之直积仍为投射的充分必要条件是 R 为左完全环且是右凝聚环.这两种环的定义可在[周,88]或[R,79]中找到.

此外,S. Einlenberg 给出了如下的引人注目的结果.

命题 5　设 $P\in \mathrm{P}_R\mathfrak{M}$($R$ 为任意环),则有无限生成自由左 R－模 F'使$P\oplus F'\simeq F'$为自由的.

证　由 $P\in \mathrm{P}_R\mathfrak{M}$ 知有 $Q\in {}_R\mathfrak{M}$ 使 $P\oplus Q=F$ 为自由左R－模.令

$$F'=(P\oplus Q)\oplus(P\oplus Q)\oplus\cdots\oplus(P\oplus Q)\oplus\cdots$$

则 $F'\in \mathrm{Free}_R\mathfrak{M}$.而注意 $P\oplus Q\simeq Q\oplus P$ 知

$$\begin{aligned}P\oplus F'&\simeq P\oplus(Q\oplus P)\oplus(Q\oplus P)\oplus\cdots\oplus(Q\oplus P)\oplus\cdots\\&\simeq(P\oplus Q)\oplus(P\oplus Q)\oplus\cdots\oplus(P\oplus Q)\oplus\cdots\simeq F'\end{aligned}$$ □

注 2　设 $A,B,C\in {}_R\mathfrak{M}$.当 $B\simeq C$ 时当然有 $A\oplus B\simeq A\oplus C$.但反之不真.即对直和消去律不能成立(参看[Mc,84]).对什么样的环直和消去律成立,这是一个艰难的问题.由于它与向量丛理论以及代数 K－理论都有密切关系,近十几年已成为一个热门问题.1988 年 P. Menal 在一篇综述性的论文[Me,88]中也只谈到一些特殊环上的结果.比如

(i) (E. G. Evans, 1973) 设 R 为交换的 Noether 局部环,则一切有限生成模 M 可从直和中消去,即,$M\oplus B\simeq M\oplus C$ 时 $B\simeq C$(见[E,73]);

(ii) (R.B. Warfield, 1980) 设 $M\in {}_R\mathfrak{M}$,End_RM 为(von Neumann)正则环(即 $\forall x\in \mathrm{End}_RM$,必有 $x'\in \mathrm{End}_RM$ 使 $xx'x=x$),则 M 可从直和中消去的充分必要条件为 End_RM 为幺正则环(即 $\forall x$

$\in \mathrm{End}_R M$，必有可逆元 $u \in \mathrm{End}_R M$ 使 $xux = x$）（见[W,80]）.

此外，现在还知道：对半局部环 R，R 可从直和中消去（因此一切有限生成投射 R－模都可从直和中消去）（见[F，Ⅱ，76]，p.143）.

我们在[T,94]中已证明：环 R 中任意元 x,y 之积 $xy=1$ 时必有 $yx=1$ 的充分必要条件是 $R\oplus M\simeq R$ 蕴含着 $M=0$, $\forall M \in {}_R\mathfrak{M}$.

对于 Artin 模（对子模满足 DCC 的模），1993 年 R. Camps 与 W. Dicks 得到了十分理想的结果：Artin 模都可从直和中消去（见[CD,93]）.

与命题 5 相关的有准自由模（stably free module）的概念，与一个有限生成自由模的直和为自由模的有限生成投射模称为准自由模，这种模在代数 K－理论中有重要应用.

回到投射模，对投射模的张量积，我们来介绍如下的有用结果.

定理 3 （i）设 R 为交换环，$P_1, P_2 \in \mathrm{P}_R\mathfrak{M}$，则 $P_1 \underset{R}{\otimes} P_2 \in \mathrm{P}_R\mathfrak{M}$. 更一般地，若 $P_j \in \mathrm{P}_R\mathfrak{M}$, $j=1,2,\cdots,n$，则

$$P_1 \underset{R}{\otimes} P_2 \underset{R}{\otimes} \cdots \underset{R}{\otimes} P_n \in \mathrm{P}_R\mathfrak{M}$$

即，$\mathrm{P}_R\mathfrak{M}$（显然是${}_R\mathfrak{M}$ 的一个子范畴）对$\underset{R}{\otimes}$ 是封闭的；

（ii）设 R, S 为任意环，$P_1 \in \mathrm{P}_S\mathfrak{M}$ 且 $P_1 \in {}_S\mathfrak{M}_R$，$P_2 \in \mathrm{P}_R\mathfrak{M}$，则

$$P_1 \underset{R}{\otimes} P_2 \in \mathrm{P}_S\mathfrak{M}$$

（iii）设 R 为交换环且为域 K 上的代数，$P_j \in {}_R\mathfrak{M}$, $j=1,2,\cdots,n$，则

$$P_1 \underset{R}{\otimes} P_2 \underset{R}{\otimes} \cdots \underset{R}{\otimes} P_n \in \mathrm{P}_R\mathfrak{M} \Leftrightarrow P_j \in \mathrm{P}_R\mathfrak{M}, \quad j=1,2,\cdots,n$$

证 （i）由归纳法原理知，只需证 $n=2$ 的情况. 由 $P_1, P_2 \in$

$P_R\mathfrak{M}$ 知必有 $Q_1, Q_2 \in {}_R\mathfrak{M}$ 使 $P_j \underset{R}{\oplus} Q_j = F_j \in \mathrm{Free}_R\mathfrak{M}, j=1,2$. 由上章§7,定理 5 知

$$F_1 \underset{R}{\otimes} F_2 \simeq P_1 \underset{R}{\otimes} P_2 \oplus (P_1 \underset{R}{\otimes} Q_2 \oplus Q_1 \underset{R}{\otimes} P_2 \oplus Q_1 \underset{R}{\otimes} Q_2)$$

但 $F_1 \underset{R}{\otimes} F_2 \in \mathrm{Free}_R\mathfrak{M}$,因此,作为它的直和项,$P_1 \underset{R}{\otimes} P_2 \in \mathrm{P}_R\mathfrak{M}$.

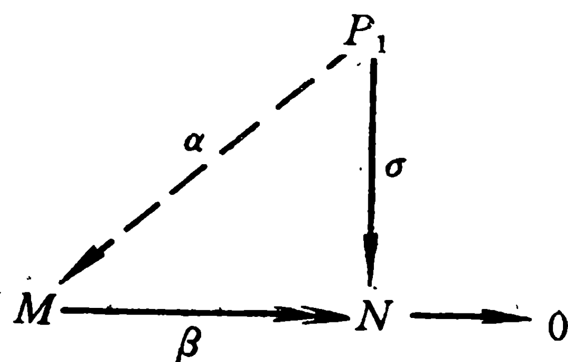
(ii) 由设知有 $Q_2 \in {}_R\mathfrak{M}$ 使 $P_2 \oplus Q_2 \simeq \coprod\limits_{j\in J} R$. 于是有

$$\begin{array}{l} P_1 \underset{R}{\otimes} \coprod\limits_{j\in J} R \simeq \coprod\limits_{j\in J} (P_1 \underset{R}{\otimes} R) \simeq \coprod\limits_{j\in J} P_1 \in \mathrm{P}_S\mathfrak{M} \\ \quad \wr\! | \\ P_1 \underset{R}{\otimes} P_2 \oplus P_1 \underset{R}{\otimes} Q_2 \end{array}$$

由定理 2 即知 $P_1 \underset{R}{\otimes} P_2 \in \mathrm{P}_S\mathfrak{M}$.

(iii) $\Leftarrow$:已由(i)得出.

$\Rightarrow$:只需对 $n=2$ 证 $P_1 \in \mathrm{P}_R\mathfrak{M}$(然后用归纳法). 即证对${}_R\mathfrak{M}$中由满同态 $\beta \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$ 与同态 $\sigma \in \mathrm{Hom}_R(P_1, N)$($M, N, \beta, \sigma$ 都是任取的)构成行正合的下图,必有 $\alpha \in \mathrm{Hom}_R(P_1, M)$ 使新图为交换图.



(1)

事实上,以函子 $-\underset{R}{\otimes} P_2$ 作用上图(1)的实箭头图得${}_R\mathfrak{M}$ 中如下实箭头图(注意此函子为右正合的,$\beta \otimes I_{P_2}$ 仍为满同态):

由 $P_1 \underset{R}{\otimes} P_2 \in \mathrm{P}_R\mathfrak{M}$ 知,必有 R-模同态 f 使图(2)成交换图.

$$\begin{array}{ccccc} & & P_1 \underset{R}{\otimes} P_2 & & \\ & \swarrow f & \downarrow \sigma\otimes I_{P_2} & & \\ M\underset{R}{\otimes}P_2 & \xrightarrow{\beta\otimes I_{P_2}} & N\underset{R}{\otimes}P_2 & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{2}$$

即
$$(\beta\otimes I_{P_2})f=\sigma\otimes I_{P_2}$$

另一方面，由于 $P_1,P_2\in {}_K\mathfrak{M}=\mathbb{L}S_K$，$P_1,P_2$ 都有 K－基．令 $\{e_j\mid j\in J\}$ 为 P_2 的 K－基．若 $x_1,x_2\in P_1$ 使

$$(x_1-x_2)\otimes e_j=0$$

将 x_1-x_2 写成 P_1 之 K－基的 K－线性组合．由命题 2，(v)即知 $x_1-x_2=0$，即，$x_1=x_2$．由此知，$P_1\underset{R}{\otimes}P_2$ 中任一元素都可唯一表成$\sum\limits_{<\infty}a_j\otimes e_j$ 之形（$a_j\in P_1$）．同理 $M\underset{R}{\otimes}P_2$ 与 $N\underset{R}{\otimes}P_2$ 中的元素也有这种性质．

任取 $a\in P_1$，令

$$f(a\otimes e_i)=\sum_{<\infty}m_j\otimes e_j$$

则
$$(\beta\otimes I_{P_2})f(a\otimes e_i)=\sum_{<\infty}(\beta(m_j)\otimes e_j)\equiv\sum_{<\infty}n_j\otimes e_j \tag{3}$$

其中 $n_j=\beta(m_j)$．令 $\sigma(a)=n'\in N$，则又有

$$(\sigma\otimes I_{P_2})(a\otimes e_i)=\sigma(a)\otimes e_i=n'\otimes e_i. \tag{4}$$

由(3)、(4)，且注意$(\beta\otimes I_{P_2})f=\sigma\otimes I_{P_2}$知 $n_i=n'$，且当 $j\neq i$ 时 $n_j=0$．于是

$$\beta(m_j)=\begin{cases}n_i=n'=\sigma(a), & \text{当 } j=i \text{ 时}\\ 0, & \text{当 } j\neq i \text{ 时}\end{cases}$$

再令 $\alpha(a)=m_i$，则得 $\alpha\in \mathrm{Hom}_R(P_1,M)$使 $\beta\alpha=\sigma$．因此 $P_1\in \mathbf{P}_R\mathfrak{M}$． □

下面来介绍投射分解与投射维数，这是同调代数中的中心内容之一.

定义 4 设 $M\in {}_R\mathfrak{M}, P_j\in \mathrm{P}_R\mathfrak{M}, j=0,1,\cdots$，则称 R-模正合列

$$\cdots\to P_n\to P_{n-1}\to\cdots\to P_1\to P_0\to M\to 0$$

为 M 的一个**投射分解**(Projective resolution).

如果 M 有下形的(有限长)投射分解

$$0\to P_n\to P_{n-1}\to\cdots\to P_1\to P_0\to M\to 0 \tag{5}$$

则记

$\mathrm{lpd}(M)=\inf\{n\mid 0\to P_n\to P_{n-1}\to\cdots\to P_1\to P_0\to M\to 0$ 为 M 的投射分解$\}$.

如果 M 无(5)形的投射分解，则记为 $\mathrm{lpd}(M)=\infty$.

称 $\mathrm{lpd}(M)$ 为 M 的**左投射维数**(left projective dimension).

记

$$\mathrm{lpD}(R)=\sup_{\forall M\in {}_R\mathfrak{M}}\{\mathrm{lpd}(M)\}$$

且称为环 R 的**左整体维数**(left global dimension)，有时也简记为 $\mathrm{lD}(R)$ 或 $\mathrm{lgD}(R)$.

类似地可定义 $N\in\mathfrak{M}_R$ 的**右投射维数**(right projective dimension)，记为 $\mathrm{rpd}(N)$，以及环 R 的**右整体维数**(right global dimension)，记为 $\mathrm{rpD}(R)$ 或 $\mathrm{rgD}(R)$，$\mathrm{rD}(R)$.

由定义 4 可得(以下及以后对左模的结果同样适用于右模)

定理 4 设 R 为任意环，则在 ${}_R\mathfrak{M}$ 中下述结果成立：

(i) 任何 $M\in {}_R\mathfrak{M}$ 都有投射分解，因此，$M\neq 0$ 时总有确定的 $\mathrm{lpd}(M)$(有限或∞)；

(ii) $\mathrm{lpd}(M)=0$ 的充分必要条件是 $M\in \mathrm{P}_R\mathfrak{M}$，

$\mathrm{lpd}(M)\leqslant 1$ 的充分必要条件是有 $P_0, P_1\in \mathrm{P}_R\mathfrak{M}$ 使 $M\simeq P_0/P_1$；

(iii) $\mathrm{lpD}(R)=0$ 的充分必要条件是一切左 R-模都是投射

的，即 $P_R\mathfrak{M}={}_R\mathfrak{M}$；

(iv) $\mathrm{lpD}(R)\leqslant 1$ 的充分必要条件是任一投射左 R－模的子模都是投射的.

证　(i) 因为自由模必是投射模，且 M 必有自由分解(命题3)，这个自由分解当然也是 M 的投射分解.

(ii) $\mathrm{lpd}(M)=0$ 等价于 M 有形如

$$0\to P_0\to M\to 0$$

的投射分解. 这又等价于 $M\simeq P_0$，因此等价于 $M\in P_R\mathfrak{M}$.

$\mathrm{lpd}(M)\leqslant 1$ 等价于 M 有形如

$$0\to P_1\to P_0\to M\to 0$$

的投射分解，因此又等价于 $M\simeq P_0/P_1$.

(iii) 由定义 4 与上证的(ii)即得.

为证(iv)，我们先来证明重要的下述结果. 我们给出的证法与过去的证法不同，它不需要太多的预备知识，且让读者易于接受，同时这个方法作对偶翻译即得下述结果的对偶命题的证明(见下节)，具有一箭双雕之效.

命题 6　(Schanuel 引理)设 $P_1,P_2\in P_R\mathfrak{M}$ 且有左 R－模正合列：

$$0\to K_1\to P_1\xrightarrow{\pi_1}M\to 0$$

$$0\to K_2\to P_2\xrightarrow{\pi_2}M\to 0$$

则有左 R－模同构

$$K_1\oplus P_2\simeq K_2\oplus P_1.$$

因此 $K_1\in P_R\mathfrak{M}\Leftrightarrow K_2\in P_R\mathfrak{M}$.

证　考察下面的实箭头图

由 $P_1\in P_R\mathfrak{M}$ 知，必有 $f\in \mathrm{Hom}_R(P_1,P_2)$ 使图中方孔①为交换图，即 $\pi_1=\pi_2 f$. 由上章 §4 命题 1(或直接用图追踪)知必有 $g\in \mathrm{Hom}_R(K_1,K_2)$ 使图(6)对纵向箭头 g,f,I_M 成交换图. 同理由

$P_2 \in \mathrm{P}_R\mathfrak{M}$ 知有 $f' \in \mathrm{Hom}_R(P_2, P_1)$ 与 $g' \in \mathrm{Hom}_R(K_2, K_1)$ 使图(6)关于 g', f', I_M 也成交换图.

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & K_1 & \longrightarrow & P_1 & \xrightarrow{\pi_1} & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & g' \uparrow \downarrow g & & f' \uparrow \downarrow f & ① & \downarrow I_M & & \\
0 & \longrightarrow & K_2 & \longrightarrow & P_2 & \xrightarrow{\pi_2} & M & \longrightarrow & 0
\end{array} \qquad (6)$$

再来看下面的图(7)(这里为方便起见用∐代替⊕):

$$\begin{array}{ccccc}
K_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & K_1 \amalg P_2 & \xleftarrow{\alpha_2} & P_2 \\
 & \searrow^{\alpha_1' g} \quad ② & \downarrow \varphi & ① \quad \swarrow^{\alpha_2' f'} & \\
K_2 & \xrightarrow{\alpha_1'} & K_2 \amalg P_1 & \xleftarrow{\alpha_2'} & P_1 \\
 & \searrow^{\alpha_1 g'} \quad ③ & \downarrow \varphi' & ④ \quad \swarrow^{\alpha_2 f} & \\
 & & K_1 \amalg P_2 & &
\end{array} \qquad (7)$$

由直和的泛性质($\cup P_{\text{II}}$,见上章§6 定理 1)知,必有左 R-模同态 $\varphi: K_1 \amalg P_2 \to K_2 \amalg P_1$ 使图(7)之①、②为交换图. 同理有左 R-模同态 $\varphi': K_2 \amalg P_1 \to K_1 \amalg P_2$ 使图(7)的③、④为交换图. 但由直和泛性质所述的唯一性知

$$\varphi' \varphi = I_{K_1 \amalg P_2}$$

$$\varphi \varphi' = I_{K_2 \amalg P_1}$$

由此即知 φ 为左 R-模同构,命题证毕. □

定理 4(iv)之证: ⇐是显见的.

⇒:设 $\mathrm{lpD}(R) \leqslant 1$, K 为 $P \in \mathrm{P}_R\mathfrak{M}$ 的任一子模,来证 $K \in$

$P_R\mathfrak{M}$.

事实上,由设有$_R\mathfrak{M}$中的正合列

$$0\to K\to P\to P/K\to 0$$

由 $\mathrm{lpD}(R)\leqslant 1$ 知,P/K 必有下形的投射分解

$$0\to P_1\to P_0\to P/K\to 0$$

用 Schanuel 引理可知

$$K\oplus P_0\simeq P_1\oplus P$$

但 $P_1\oplus P\in P_R\mathfrak{M}$,因此 K 作为其同构意义下的直和项也是投射的. □

在结束本节之前,我们指出下列诸点,务请读者注意.

(i) 以后我们将证明(见下节):$\mathrm{lpD}(R)=0\Leftrightarrow R$ 为左 Artin 半单环$\Leftrightarrow R$ 为右 Artin 半单环$\Leftrightarrow\mathrm{rpD}(R)=0$. Wedderburn - Artin 定理指出:左(右)Artin 半单环正好是同构于有限个除环上全阵环直和的环.因此,下节之后 Artin 半单环不再分左、右.但一般地,$\mathrm{lpD}(R)\neq\mathrm{rpD}(R)$. I. Kaplansky 于 1958 年曾给出一个例子,说明有环 R 使 $\mathrm{lpD}(R)=1$ 但 $\mathrm{rpD}(R)=2$. 1969 年 A. V. Jategaonkar 在[Jat.69]中甚至证明了:任给 $1\leqslant m<n\leqslant\infty$,都有环$R$ 使 $\mathrm{lpD}(R)=m$,而 $\mathrm{rpD}(R)=n$.

(ii) 在下章§3 我们将证:$\mathrm{lpd}(R)\leqslant 1\Leftrightarrow R$ 为左遗传环,即左理想都为投射模的环.显然,Artin 半单环都是左(右)遗传环.

(iii) 由上可知,lpd(rpd)是模的一个(同调)不变量. $\mathrm{lpd}(M)$ ($\mathrm{rpd}(M)$)度量着模 M 与投射模的差距.而 lpD(rpD)为环的(同调)不变量,$\mathrm{lpD}(R)$($\mathrm{rpD}(R)$)度量着 R 与半单 Artin 环的差距.事实上,lpD(rpD)将环分成了等价类(比同构类大),同一类的环(即 lpD 相同的环)具有相当多的共性.这也是同调代数在环论中成为重要工具的主要原因.

习 题 2.1

1. 设 R 为任意环,$X\in{}_R\mathfrak{M}$. 记 $X^*=\mathrm{Hom}_R(X,R)(\in\mathfrak{M}_R)$. 证明:

(i) 若 F 为自由左 R - 模,则 F^* 为自由右 R - 模;

(ii) 若 P 为投射左 R - 模,则 F^* 为投射右 R - 模.

2. 设 R 为任意环.若有左 R - 模 X 使对任意的 $M \in {}_R\mathfrak{M}$ 都有一个集合 J 使有 R - 模满同态 $\pi: \coprod_{j \in J} X \twoheadrightarrow M$,则称 X 为${}_R\mathfrak{M}$ 的一个**生成子**(generator)证明:

(i) R 为${}_R\mathfrak{M}$ 的生成子;

(ii) 设 $P \in \mathrm{P}_R\mathfrak{M}$ 且 $\mathrm{Hom}_R(P,—)$为忠实函子,则 P 为${}_R\mathfrak{M}$ 的生成子.

3. 设 R 为任意环,$P \in \mathrm{P}_R\mathfrak{M}$,$I$ 为 R 的(双侧)理想.证明:$P/IP \in \mathrm{P}_{R/I}\mathfrak{M}$.

4. 设 $R \in \mathrm{PID}$(即 R 为无零子交换环且一切理想都是主理想.如$\mathbb{Z}$,域 K 上的一元多项式环 $K[X]$都是 PID).证明:

(i) 有限生成自由 R - 模 F 的任一子模 M 一定有限生成自由 R - 模;

(ii) 有限生成投射 R - 模一定是自由 R - 模.

(提示:设 n 为 F 的基元素数之最小者,对 n 用归纳法证(i),再由(i)证(ii)).

注:I. Kaplansky 在 1958 年用超限归纳法证明了:PID 上的投射模都是自由的.

5. 试证:环 R 上一切(左)R - 模都是自由模的充分必要条件是 R 为除环(体).

§2 内射模与内射维数

内射模与投射模,以及下节介绍的平坦模为模论及同调代数的三大模类.从下面的定理 1 与定义 1 可以看出:内射模与投射模是对偶概念,它们具备不少对偶的性质,但也并非一切性质都对偶着.今后,如投射模的结果对偶翻译到内射模仍成立且可用对偶的证法证明,我们常常不再写出证明,只注明可对偶地给出.从线性空间角度看,投射模与内射模都是线性空间的推广.但它们(甚至自由模与内射模)是互不蕴含的两种模类.

内射模的一些结果在群论与代数几何中有重要应用.下面将

会看到，内射$\mathbb{Z}$－模与可除 Abel 群（可除$\mathbb{Z}$－模）是等价概念.

先来证明（部分地）对偶于上节定理 1 的下述定理. 还有一些与之等价的论述将在以后需要时介绍. 本节中的环 R 在未加另外指明时都指任意环，R－模均指左 R－模.

定理 1　设 $E\in{}_R\mathfrak{M}$，则下述各点是等价的：

(i)（可开拓性）任意 $M\in{}_R\mathfrak{M}$ 的子模 N 到 E 的左 R－模同态必可开拓为 M 到 E 的左 R－模同态. 即在${}_R\mathfrak{M}$ 中，对任意的下图必有左 R－模同态 α 使新图为（行正合）交换图：

$$\begin{array}{ccccc} & & E & & \\ & & \uparrow{\scriptstyle \sigma} & \nwarrow{\scriptstyle \alpha} & \\ 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow[\beta]{} & M \end{array}$$

(ii) $\mathrm{Hom}_R(-,E)$为正合反变函子；

(iii) 对任意的 $M\in{}_R\mathfrak{M}$，E 必为 M－内射的；

(iv)（可裂性）${}_R\mathfrak{M}$ 中任何单同态；$\rho:E\rightarrowtail A$ 必是可裂的，即必有${}_R\mathfrak{M}$ 中的同态 $\delta:A\to E$ 使 $\delta\rho=I_E$（即单同态 ρ 必有左逆），因此

$$A\simeq E\oplus\mathrm{Coker}\rho;$$

(v) ${}_R\mathfrak{M}$ 中任短正合列

$$0\to E\to A\to B\to 0$$

都是可裂的，因此

$$A\simeq E\oplus B$$

(vi) ${}_R\mathfrak{M}$ 中的短正合列

$$0\to E\to A\to C\to 0$$

在 C 为循环左 R－模时必是可裂的，因此

$$A \simeq E \oplus C$$

(vii) (Bear 准则)对 R 的任意左理想 I 以及任意的 $f \in \mathrm{Hom}_R(I,E)$,必有 $e \in E$ 使 $f(x) = xe$, $\forall x \in E$. 因此 $I = R$ 时 $\mathrm{Im} f = \langle f(1) \rangle$为循环模;

(viii) (Bear 准则)对 R 的任意左理想 I 以及任意的 $f \in \mathrm{Hom}_R(I,E)$, f必可开拓为$f' \in \mathrm{Hom}_R(R,E)$(即 $f'|_I = f$),即 E 为(M-内射模意义下的)R-内射模.

证 (i)⇒(ii)⇒(iii)⇒(iv)⇒(v)的证明对偶于上节定理 1 之证的相应部分.

(v)⇒(vi)是当然的.

(vi)⇒(vii):考察${}_R\mathfrak{M}$ 中实箭头所示的上行正合图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & I & \xrightarrow{i} & R & \xrightarrow{\pi} & R/I & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f & \swarrow f' & \downarrow g & & \downarrow I_{R/I} & & \\ 0 & \dashrightarrow & E & \underset{i'}{\overset{s}{\rightleftarrows}} & U & \xrightarrow{\pi'} & R/I & \dashrightarrow & 0 \end{array}$$

令 $W = \{(f(x), -i(x)) \mid \forall x \in I\}$,则 W 为$E \oplus R$ 的子模,于是可作商模

$$U = (E \oplus R)/W$$

定义 $g: R \to U$ 使 $r \mapsto (0,r) + W$, $\forall r \in R$,并定义 $i': E \to U$ 使 $e \mapsto (e,0) + W$, $\forall e \in E$. 再定义 $\pi': U \to R/I$ 使 $(e,r) + W \mapsto \pi(r)$. 容易看出 $g(0) = \bar{0}$, $i'(0) = \bar{0}$,因此 g, i'都是完全确定的左 R-模同态. 对于 π',注意 U 中零元素 $\bar{0} = (e,r) + W \Leftrightarrow$有 $x \in I$ 使 $e = f(x)$, $r = -i(x)$. 于是

$$\pi'(\bar{0}) = \pi(-i(x)) = -\pi i(x) \overset{\text{上行正合}}{=\!=\!=} 0$$

即;π'也是完全确定的左R-模同态.由i',g,π'的上述定义容易由图追踪知,在先不看f'时,上图成${}_R\mathfrak{M}$中行正合的交换图.

注意下行正合且R/I为循环模,由(vi)知下行可裂,因此有左R-模同态$s:U\to E$使$si'=I_E$.于是可定义$f'=sg:R\to E$作为R到E的左R-模同态.此时取$e=f'(1)$(1为R的单位元),则有

$$f'(x)=f'(x\cdot 1)=xf'(1)=xe,\quad \forall x\in R$$

而当$x\in I$时

$$f(x)=I_Ef(x)=si'f(x)\overset{}{\underset{i'f=gi}{=\!=\!=\!=}}sgi(x)=sg(x)=f'(x)$$
$$=xe$$

这就证出了(vii).

(vii)⇒(viii):令$f\in \mathrm{Hom}_R(I,E)$.由(vii)知必有$e\in E$使$f(x)=xe,\forall x\in I$.定义左R-模同态$f':R\to E$使得$1\mapsto e$,则

$$f'(x)=f'(x\cdot 1)=xf'(1)=xe,\quad \forall x\in R$$

显然有$f'|_I=f$.

(viii)⇒(i):只需证对任意的$M\in{}_R\mathfrak{M}$的子模N,任意的$\sigma\in \mathrm{Hom}_R(N,E)$可开拓为$\alpha\in \mathrm{Hom}_R(M,E)$.这只需设由$N$将$\sigma$向$N,M$间的子模开拓至$N_0$止(不能再开拓),证明$N_0=M$即可.为此,设

$$S=\{(N',\sigma')\mid N<N'<M,\sigma'\in \mathrm{Hom}_R(N',E)\text{为}\sigma\text{的开拓}\},$$

则由于$(N,\sigma)\in S$,于是$S\neq\varnothing$.在S中定义

$$(N',\sigma')\leqslant(N'',\sigma'')\Longleftrightarrow N'<N''<M,\text{且}\sigma''\text{为}\sigma'\text{的开拓}.$$

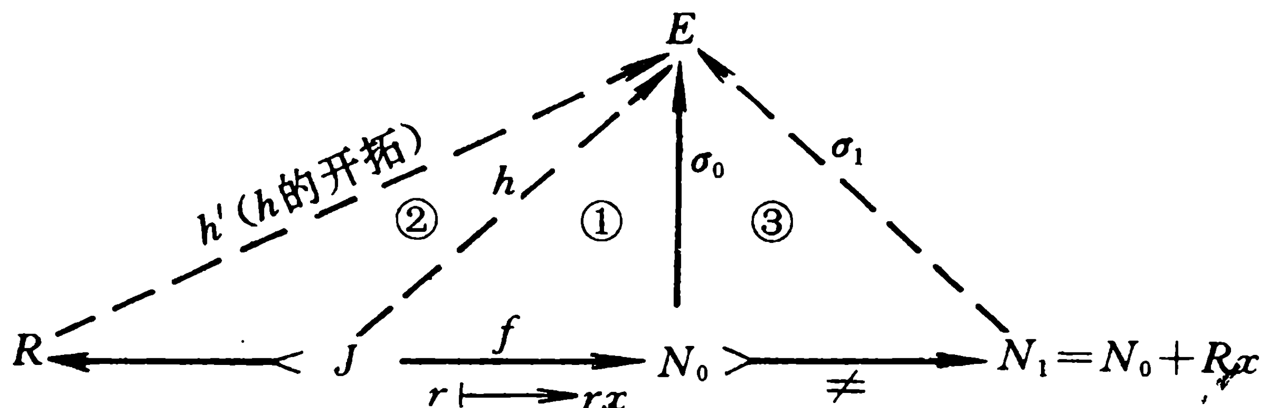
可以看出S关于$\leqslant$成偏序集且S的全序子集都有上界在S中.于是由Zorn引理知S必有极大元(N_0,σ_0).下证$N_0=M$即可.

反设$N_0\subsetneqq M$,则有$x\in M\setminus N_0$.于是(注意$0\cdot x\in N_0$)

$$J\equiv\{r\mid r\in R,rx\in N_0\}\lhd_l R$$

(表J为R之左理想).记$f\in \mathrm{Hom}_R(J,N_0)$使$f(r)=rx,\forall x\in$

J. 定义 $h\in \mathrm{Hom}_R(J,E)$ 使 $h(r)=\sigma_0(rx)$, $\forall r\in J$. 由(viii)知 h 可开拓为 $h'\in \mathrm{Hom}_R(R,E)$. 再记 $N_1=N_0+Rx$, 则 $N_0\subsetneqq N_1$.



在上图中定义 $\sigma_1: N_1\to E$ 使

$$\sigma_1(n_0+rx)=\sigma_0(n_0)+h'(r),\quad \forall n_0\in N_0, r\in R$$

只需证明 σ_1 是完全确定的, 即知 $\sigma_1\in \mathrm{Hom}_R(N_1,E)$. 于是再由显见的事实——$\sigma_1$ 为 σ_0 的开拓, 即得出矛盾.

事实上, 设 $n_0+rx=0$, 则 $rx=-n_0\in N_0$, 从而 $r\in J$. 于是

$$\sigma_1(0)=\sigma_1(n_0+rx)=\sigma_0(n_0)+h'(r)\overset{}{\underset{r\in J}{=\!=\!=}}\sigma_0(n_0)+h(r)$$

$$\underset{h(r)=\sigma_0(rx)}{=\!=\!=\!=\!=\!=}\sigma_0(n_0)+\sigma_0(rx)=\sigma_0(n_0+rx)=\sigma_0(0)=0$$

从而定理证毕. □

由定理 1 我们给出如下定义.

定义 1 满足定理 1 中(i)的 $E\in {}_R\mathfrak{M}$ 称为**内射左 R - 模**(injective left R - module), 记为 $E\in \mathrm{Inj}_R\mathfrak{M}$.

当然也可用定理 1 中任一个等价条件作为内射模的定义. 现在, 由定理 1(viii)与定义 1 立得如下推论.

推论 1 内射左 R - 模即 R - 内射左 R - 模.

这条推论读起来有点拗口(后者是在 M - 内射意义下而言的, 见上章 §5). 但它正好说明了 Bear 准则的意义: 检验 $E\in {}_R\mathfrak{M}$ 是否为内射的, 不必对一切 $M\in {}_R\mathfrak{M}$ 检验 E 是否为 M - 内射的,

只要对 $M=R$ 一个进行检验就行了.

此外,分析定理 1 证明中"(vi)⇒(vii)"的一段,注意那里未用到 $E\in \mathrm{Inj}_R\mathfrak{M}$,也未用到 I 为 R 的左理想(尽管(vii)的条件中有此假设!),可以看出,事实上我们已证出更一般的下述结果.

命题 1 在 $_R\mathfrak{M}$ 中对带正合行且由实箭头所示的下图,必可补上虚箭头所示的同态使成行正合交换图.

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{\pi} & C & \longrightarrow & 0\\
 & & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow I_C & & \\
0 & \dashrightarrow & D & \overset{i'}{\dashrightarrow} & U & \overset{\pi'}{\dashrightarrow} & C & \dashrightarrow & 0
\end{array}$$

其中 $U=(D\oplus B)/W$, $W=\{(f(a),-i(a))\mid \forall a\in A\}$, $g:B\to U$ 使 $g(b)=(0,b)+W$, $\forall b\in B$, $i':D\to U$ 使 $i'(d)=(d,0)+W$, $\forall d\in D$. 而 $\pi':U\to C$ 使 $\pi'((d,b)+W)=\pi(b)$. $\forall(d,b)+W\in U$.

注 1 由命题 1 中定义 U,i',g 的方法可知:在 $_R\mathfrak{M}$ 中任给 $f\in \mathrm{Hom}_R(A,D)$ 与 $i\in \mathrm{Hom}_R(A,B)$(i 不必为单同态)必有 U, g, i' 使 $gi=i'f$. 还可证明在同构意义下 U,g,i' 是唯一的. (i',g) 称为 (f,i) 的**推出**(pushout). 推出的对偶概念——**拉回**(pullback)又称纤维积. 它们在拓扑学和几何学中都有重要应用.

注 2 由上节知:投射模为自由模的直和项. 对偶地,我们可定义**上自由**(cofree)模的概念如下. 对任意环 R, $R\in {_\mathbb{Z}\mathfrak{M}_R}$, 而 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\in {_\mathbb{Z}\mathfrak{M}}$. 于是,定义(下面定义 3 中将给出一般性的定义)

$$R^{\circledast}=\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

则 $R^{\circledast}\in {_R\mathfrak{M}}$(见上章§3),称 $\prod\limits_{j\in J}R^{\circledast}$ 为上自由左 R-模. 可以证明: $E\in \mathrm{Inj}_R\mathfrak{M}\Leftrightarrow E$ 为一个上自由左 R-模的直和项. 欲知其详,请参看[HS,70].

对内射模与直积的关系,我们有对偶于上节定理 2 的下述结

果.

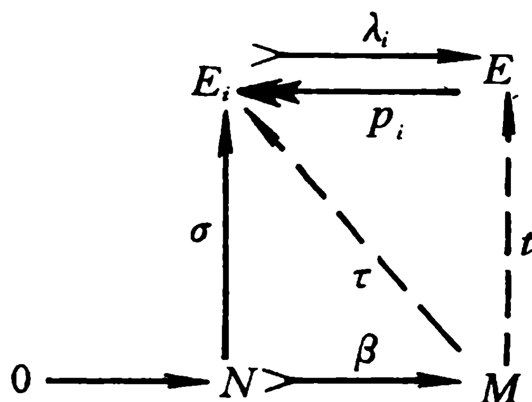
定理 2 设 $E=\prod_{j\in J}E_j\in {}_R\mathfrak{M}$. 则 $E\in \mathrm{Inj}_R\mathfrak{M}$ 的充分必要条件是 $E_i\in \mathrm{Inj}_R\mathfrak{M}$, $\forall i\in J$.

证 上节定理 2 之证不能对偶地译成这里的证明. 今另证如下.

$\Rightarrow$: 注意

$$E=\prod_{j\in J}E_j\simeq(\prod_{\substack{j\in J\\ j\neq i}}E_j)\oplus E_i,\quad \forall i\in J$$

于是有标准单射 $\lambda_i:E_i\rightarrowtail E$ 与标准投射 $p_i:E\twoheadrightarrow E_i$. 对如下的任意实箭头图

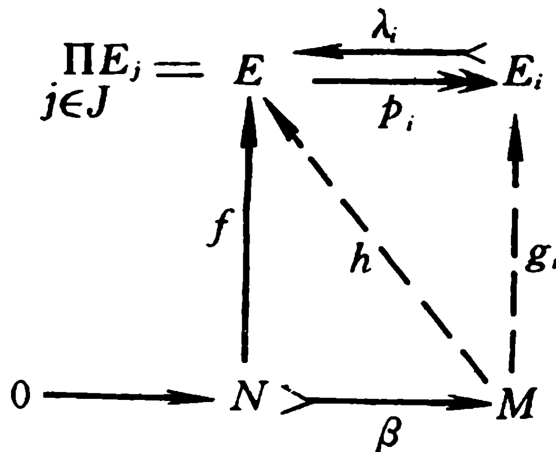


求出 τ 使 $\tau\beta=\sigma$ 即知 $E_i\in \mathrm{Inj}_R\mathfrak{M}$.

事实上, 由 $E\in \mathrm{Inj}_R\mathfrak{M}$ 知必有 $t\in \mathrm{Hom}_R(M,E)$ 使 $t\beta=\lambda_i\sigma$. 于是再定义 $\tau=p_it$, 则 $\tau\in \mathrm{Hom}_R(M,E_i)$ 且

$$\tau\beta=p_it\beta=p_i\lambda_i\sigma=I_{E_i}\sigma=\sigma,\quad \forall i\in J$$

$\Leftarrow$: 仿上段证明. 考察由实箭头给出的下图, 其中 f,M,N,β



都是任意的.

因为 $E_i \in \mathrm{Inj}_R\mathfrak{M}$, $p_i f \in \mathrm{Hom}_R(N, E_i)$, 因此有 $g_i \in \mathrm{Hom}_R(M, E_i)$使 $g_i\beta = p_i f$. 于是可定义 $h \in \mathrm{Hom}_R(M, E)$使

$$h(m) = (g_i(m)) \in E, \quad \forall m \in M$$

此时

$$h\beta(n) = (g_i(\beta(n))) \xlongequal[g_i\beta = p_i f]{} (p_i f(n)) = f(n), \quad \forall n \in N$$

故 $h\beta = f$, 即 $E \in \mathrm{Inj}_R\mathfrak{M}$. □

由本定理证明中的"⇒"部分立得

推论 2 内射左 R - 模的直和项仍为内射左 R - 模.

注 3 一般地,内射模的直和未必再为内射模(当然指无限直和,有限直和即有限直积,已由上定理给出肯定的回答). 1958 年 E. Matlis 在[Mat,58]中证明了:任意多个内射左 R - 模之直和必为内射左 R - 模的充分必要条件是 R 为左 Noether 环(左理想满足升链条件(ACC)的环). 与此相关的是 1985 年 He Zheng - Xu 在[He,85]中证明了:任意可数无限多个内射左 R - 模之直和必为内射左 R - 模的充分必要条件是 R 为左 Noether 环. 同时他又证明了:任意左 R - 模的各内射子模的和必为内射的充分必要条件是 R 为左 Noether 环,且为左遗传环(即一切左理想都为投射模的环).

从定理 1(viii)中的 Bear 准则出发,我们来研究内射模的推广. 为此,我们不要求 R 的一切左理想 I 到模 $M \in {}_R\mathfrak{M}$ 的同态都可开拓为 R 到 M 的同态,而只要求一切由非零因子生成的左主理想都有这种开拓. 由此不难推出如下的引理. 从这个引理出发立得下面的定理 3 和定理 4. 这比其他书刊中这两条定理的证明要简单得多.

引理 1 设 $r \in R$ 为非零因子, $M \in {}_R\mathfrak{M}$. 则一切 $f \in \mathrm{Hom}_R(Rr, M)$都可开拓为 $f' \in \mathrm{Hom}_R(R, M)$的充分必要条件是 $rM = M$.

证 $\Rightarrow$:反设 $0\neq m_0\in M\setminus rM$. 取 $f\in \mathrm{Hom}_R(Rr,M)$ 使 $f(r)=m_0$. 于是对 f 的开拓 $f'\in \mathrm{Hom}_R(R,M)$ 有

$$\begin{array}{c} f'(r)=f(r)=m_0 \\ \| \\ f'(r\cdot 1)=rf'(1) \end{array}$$

注意 $m_1=f'(1)\in M$, 于是有 $m_0=rm_1\in rM$, 与设矛盾. 故 $rM=M$.

$\Leftarrow$:设非零因子 r 使 $rM=M$, $f\in \mathrm{Hom}_R(Rr,M)$. 令 $f(r)=m_0$, 则由 $rM=M$ 知, 必有 $m_1\in M$ 使 $rm_1=m_0$. 定义 $f'\in \mathrm{Hom}_R(R,M)$ 使 $f'(x)=xm_1$, $\forall x\in R$, 则 $f'(r)=rm_1=m_0$. 即 f' 为 f 的开拓. □

由此引理可引入可除模的定义, 它是可除 Abel 群(即可除$\mathbb{Z}$-模)的推广.

定义 2 设 R 为环, $M\in {}_R\mathfrak{M}$. 若对 R 中任一非零因子 r 都有 $rM=M$, 即任给 R 的非零因子 r 及 $m\in M$, $rx=m$ 在 M 中必有解(此时也称 r 整除 m, 记为 $r\mid m$), 则称 M 为**可除(左)R-模**(divisible (left) R-module). 记为 $M\in \mathrm{Div}_R\mathfrak{M}$.

注 4 定义 2 中的非零因子 r 如换成"非零元"将可能使所得定义平庸. 比如 R 为交换环, $r,s\in R$, $r,s\neq 0$ 但 $rs=0$. 若 $M\in {}_R\mathfrak{M}$ 使 $rM=M$, 则 $sM=srM=rsM=0M=0$. 于是由 $sM=M$ 只能导出 $M=0$ 的平庸结果. 即按"非零元"定义的"可除模"一般地只能为零模. [Jac. 80], p. 158 的定义就有这个缺陷.

例 1 $\mathbb{Q}\in \mathrm{Div}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M}$. 因此$\mathbb{Q}$ 为可除 Abel 群(可除 Abel 群即可除$\mathbb{Z}$-模).

由定义 2 容易验证如下结果.

命题 2 (i) $R\in \mathrm{Div}_R\mathfrak{M}\Leftrightarrow R$ 为除环$\Leftrightarrow {}_R\mathfrak{M}=\mathrm{Div}_R\mathfrak{M}$

$$\Leftrightarrow \mathfrak{M}_R=\mathrm{Div}\mathfrak{M}_R;$$

(ii) 对任意环 R, 若 $M\in \mathrm{Div}_R\mathfrak{M}$, 则 M 的直和项与商模(同

态象)都是可除的.可除 R - 模的直和与直积也都是可除的.

由定义 2,定理 1 与引理 1 立得如下的重要结果.

定理 3 对任意的环 R,内射 R - 模必为可除 R - 模,即 $\text{Inj}_R\mathfrak{M}\subseteq\text{Div}_R\mathfrak{M}$.

由此定理知可除模是内射模概念的推广.我们自然要问:对于什么样的环 R,内射 R - 模与可除 R - 模是等价概念?可以证明(见[周,88]):对无零因子交换环(即整环)R,$\text{Inj}_R\mathfrak{M}=\text{Div}_R\mathfrak{M}\Leftrightarrow \text{pD}(R)\leqslant 1$.但由引理 1 我们可立得关于非交换环(当然也包括交换环)的下述有用结果.

定理 4 设 $R\in\text{LPID}$(即 R 为无零因子环且一切左理想都是主左理想,如$\mathbb{Z}$)则 $\text{Inj}_R\mathfrak{M}=\text{Div}_R\mathfrak{M}$.

由此立得推论:

推论 3 $\text{Inj}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M}=\text{Div}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M}$.即 Abel 群 G 是内射的充分必要条件是它为可除的.

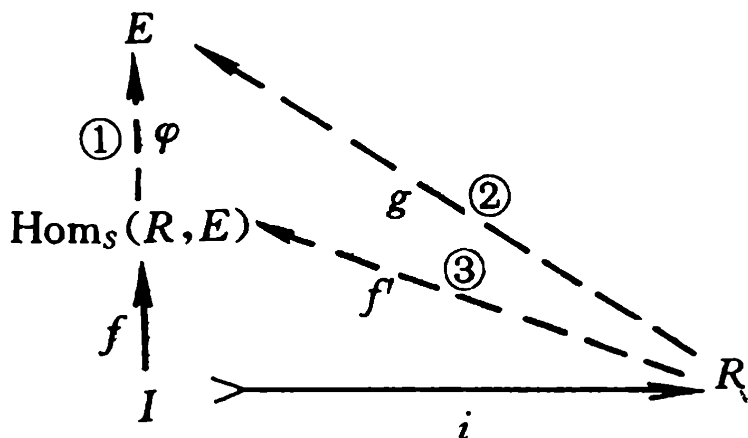
从推论 3 与例 1,可知,$\mathbb{Q}$ 为内射 Abel 群.下面我们来给出一个由内射 Abel 群(即可除 Abel 群)提供内射 R - 模(对任意环 R!)的方法.即对任意的 $E\in\text{Inj}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M}$,我们断言:对任意的环 R,$\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R,E)\in\text{Inj}_R\mathfrak{M}$(这里的 R 看作$\mathbb{Z}-R$ 双模).为此,我们来证下述更一般的结果.即,将$\mathbb{Z}$改为任意交换环 S,R 改为 S - 代数(即,$R\in{}_S\mathfrak{M}$,R 为环且 $s(rr_1)=s(r)r_1=r(sr_1)$,$\forall r,r_1\in R$,$s\in S$)来证明

命题 3 设 E 为内射 S - 模,S 为交换环,R 为 S - 代数,则 $\text{Hom}_S(R,E)$为一个内射左 R - 模.

证 任取 R 的左理想 I,令 $i\in\text{Hom}_R(I,R)$为嵌入同态,只需证任意的 $f\in\text{Hom}_R(I,\text{Hom}_S(R,E))$ 必可开拓为 $f'\in\text{Hom}_R(R,\text{Hom}_S(R,E))$(注意 $R\in{}_S\mathfrak{M}_R$,$\text{Hom}_S(R,E)\in{}_R\mathfrak{M}$).

首先注意 $E\in{}_S\mathfrak{M}_S$,$R\in\mathfrak{M}_S$(S 为交换环)且 R - 模同态 f,i 必然也是S - 模同态.我们可先从 S - 模入手(用 $E\in\text{Inj}_S\mathfrak{M}$)找出

f'使$f'i=f$,然后证明 $f'\in \mathrm{Hom}_R(R,\mathrm{Hom}_S(R,E))$. 下图中用①、②、③表示相应同态的定义顺序



①:定义 $\varphi\in \mathrm{Hom}_S(\mathrm{Hom}_S(R,E),E)$使 $\varphi(\sigma)=\sigma(1)$, $\forall\sigma\in \mathrm{Hom}_S(R,E)$;

②:由 $E\in \mathrm{Inj}_S\mathfrak{M}$ 知,必有 $g\in \mathrm{Hom}_S(R,E)$使 $gi=\varphi f$;

③:定义 $f'\in \mathrm{Hom}_S(R,\mathrm{Hom}_S(R,E))$使 $f'(r_1)(r)=g(rr_1)$, $\forall r,r_1\in R$.

先证 $f'\in \mathrm{Hom}_R(R,\mathrm{Hom}_S(R,E))$:任取 $r,r_1,r_2\in R$,则

$$f'(r_2r_1)(r)\overset{}{\underset{③}{=\!=}}g(r(r_2r_1))\underset{R\text{ 的结合律}}{=\!=\!=\!=}g((rr_2)r_1)$$

$$\underset{③}{=\!=}f'(r_1)(rr_2)\underset{\substack{f'(r_1)\in \mathrm{Hom}_S(R,E)\\ R\in {}_S\mathfrak{M}_R\\ \text{上章§3,定理 12.}}}{=\!=\!=\!=\!=\!=}r_2f'(r_1)(r)$$

由 $r\in R$ 的任意性知$f'(r_2r_1)=r_2f'(r_1)$,即 $f'\in \mathrm{Hom}_R(R,\mathrm{Hom}_S(R,E))$.

再证 $f'i=f$:任取 $x\in I$,则 $f'i(x),f(x)\in \mathrm{Hom}_S(R,E)$. 于是只需证

$$f'i(x)(r)=f(x)(r),\quad \forall r\in R,x\in I$$

事实上,

$$f'i(x)(r)\underset{③}{=\!=}g(ri(x))\underset{i\in \mathrm{Hom}_R(I,R)}{=\!=\!=\!=\!=}gi(rx)\underset{②}{=\!=}\varphi f(rx)$$

$$\underset{①}{=\!=}f(rx)(1)=rf(x)(1)\underset{\text{上章§3,定理 12}}{=\!=\!=\!=\!=}f(x)(r)\qquad\square$$

由此命题可得如下推论(参看上面的注②).

推论 4 $\mathbb{Q}$、$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\in \mathrm{Inj}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M}$. 因此,对任意环 R, $R^{⊛}=\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})\in \mathrm{Inj}_R\mathfrak{M}$.

证 $\mathbb{Q}\in \mathrm{Div}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M}=\mathrm{Inj}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M}$,因此$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\in \mathrm{Div}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M}=\mathrm{Inj}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M}$. 于是由命题 3 即得证. □

由推论 4、定理 2 与上章 §7 中关于 $\mathrm{Hom}(-,B)$与$\amalg$的关系的结果立得

推论 5 对任意环 R,若 $P\in \mathrm{f.g.P}_R\mathfrak{M}$,则 $P^{⊛}=\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})\in \mathrm{Inj}_R\mathfrak{M}$.

比推论 5 更进一步的结果我们将在下节给出. 那时,我们将看到$⊛=\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$完全沟通了内射模与下节介绍的平坦模. 现在由推论 5,先引出如下的定义.

定义 3 设 $B\in {}_R\mathfrak{M}$,则称 $B^{⊛}=\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(B,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$为 B 的**示性模**(character module).

下面为了对偶于上节建立内射分解的理论,需证:对 $\forall M\in {}_R\mathfrak{M}$ 都有 $E\in \mathrm{Inj}_R\mathfrak{M}$ 使 $0\to M\to E$ 正合. 为此先证一条引理.

引理 2 对任意的 $G\in {}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M}$,必有 $E\in \mathrm{Inj}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M}$ 使 $0\to G\to E$ 为$\mathbb{Z}$-模正合的. 因此,在同构的意义下,任何 Abel 群都可看作某一个内射(即可除)Abel 群的子群.

证 由上节知,必有自由$\mathbb{Z}$-模 $F=\coprod_{j\in J}\mathbb{Z}$ 使 $F\xrightarrow{f}G\to 0$ 正合. 因此 $G\simeq F/K$,其中 $K=\mathrm{Ker}f$. 由此知

$$G\simeq(\coprod_{j\in J}\mathbb{Z})/K<(\coprod_{j\in J}\mathbb{Q})/K$$

但$\mathbb{Q}\in \mathrm{Div}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M}$,于是$\coprod_{j\in J}\mathbb{Q}\in \mathrm{Div}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M}$,从而

$$(\coprod_{j\in J}\mathbb{Q})/K\in \mathrm{Div}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M}=\mathrm{Inj}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M}$$

于是取

$$E=(\coprod_{j\in J}\mathbb{Q})/K$$

即得证. □

由此引理可证下述结果.

定理 5 设 R 为任意环，$M\in {}_R\mathfrak{M}$，则有 $E^0\in \mathrm{Inj}_R\mathfrak{M}$ 使 $0\to M\to E^0$ 为${}_R\mathfrak{M}$ 中的正合列. 即，任何 R－模都同构于某一内射 R－模的子模. 因此，任意的 $M\in {}_R\mathfrak{M}$ 都有${}_R\mathfrak{M}$ 中的正合列

$$0\to M\to E^0\to E^1\to\cdots\to E^n\to\cdots$$

其中 $E^j\in \mathrm{Inj}_R\mathfrak{M}, j=0,1,\cdots,n,\cdots$.

证 由引理 2 知，M 作为$\mathbb{Z}$－模，有$\mathbb{Z}$－模正合列 $0\to M\to E$，其中 $E\in \mathrm{Inj}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M}$. 注意 $R\in {}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M}_R$，且 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R,-):{}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M}\to {}_R\mathfrak{M}$ 为左正合共变函子. 于是有${}_R\mathfrak{M}$ 正合列

$$0\to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R,M)\to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R,E)$$

由命题 3 知 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R,E)\in \mathrm{Inj}_R\mathfrak{M}$. 于是令 $E^0=\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R,E)$，只要证明有左 R－模单同态 $\varphi: M\to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R,M)$即可.

事实上，对任意的 $m\in M$，令 $\varphi_m: R\to M$ 为$\mathbb{Z}$－模同态且 $\varphi_m(r)=rm, \forall r\in R$(容易看出 $\varphi_m(0)=0$，这是完全确定的$\mathbb{Z}$－模同态). 若 $m\neq 0$，则 $\varphi_m(1)=1\cdot m=m\neq 0$，于是 $m\longmapsto \varphi_m, \forall m\in M$，给出一个$\mathbb{Z}$－模单同态 $\varphi: M\to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R,M)$. 下面我们说明 $\varphi\in \mathrm{Hom}_R(M,\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R,M))$即可. 首先注意到

$$\varphi_{r_1m}(r)=rr_1m,\quad \forall r_1,r\in R, m\in M$$

再由上章 §3，定理 12(iii)又知

$$(r_1\varphi_m)(r)=\varphi_m(rr_1)=rr_1m$$

于是 $\varphi_{r_1m}=r_1\varphi_m$，即 $\varphi(r_1m)=r_1\varphi(m)$. 因此必有 R－模同态 $\varphi\in \mathrm{Hom}_R(M,\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R,M))$.

再记

$$\mathrm{Coker}\,\varphi=E^0/\mathrm{Im}\varphi\equiv C^0$$

对 C^0 重复上述过程即得${}_R\mathfrak{M}$ 中的同态图

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\varphi} & E^0 & \xrightarrow{i_1\pi} & E^1 \\ & & & & \pi\searrow & & \nearrow i_1 \\ & & & & & C^0 & \end{array}$$

其中 $E^1 \in \mathrm{Inj}_R\mathfrak{M}$, $\mathrm{Im}\varphi = \mathrm{Ker}i_1\pi$. 删去 π, i_1 对应的箭头,依此类推即得${}_R\mathfrak{M}$ 中的正合列

$$0 \to M \to E^0 \to E^1 \to E^2 \to \cdots \to E^n \to \cdots$$

其中 $E^j \in \mathrm{Inj}_R\mathfrak{M}$, $j = 0,1,2,\cdots,n,\cdots$. □

今后在未加另外说明时, X^n 中的"n"均指肩码,而不是指 $\coprod_{j=1}^{n} X$ 或 $\prod_{j=1}^{n} X$.

从定理 5 可给出如下定义.

定义 4 设 R 为任意环, $M \in {}_R\mathfrak{M}$, 若 $E^j \in \mathrm{Inj}_R\mathfrak{M}$, $j = 0,1,2,\cdots,n,\cdots$, 则称${}_R\mathfrak{M}$ 中的正合列

$$0 \to M \to E^0 \to E^1 \to E^2 \to \cdots \to E^n \to \cdots \tag{1}$$

为 M 的一个**内射分解**(injective resolution).

记

$\mathrm{lid}(M) = \inf\{n \mid 0 \to M \to E^0 \to E^1 \to \cdots \to E^n \to 0$ 正合, $E^j \in \mathrm{Inj}_R\mathfrak{M}$, $j = 0,1,\cdots,n.\}$

称为 M 的**左内射维数**(left injective dimension). 当上述 n 不存在时,规定 $\mathrm{lid}(M) = \infty$.

记

$$\mathrm{liD}(R) = \sup\{\mathrm{lid}(M) \mid \forall M \in {}_R\mathfrak{M}\}$$

称为 R 的**左内射整体维数**(left injective global dimension).

类似地可定义 $M \in \mathfrak{M}_R$ 的**右内射维数** $\mathrm{rid}(M)$与 R 的**右内射整体维数** $\mathrm{riD}(R)$. 下章将证

$$\mathrm{lpD}(R) = \mathrm{liD}(R), \mathrm{rpD}(R) = \mathrm{riD}(R).$$

到那时,我们将把左(右)(投射)整体维数与左(右)内射整体维数对应地不加区别,统称为 R 的左(右)整体维数,分别记为 $\mathrm{lD}(R)$ 或 $\mathrm{lgD}(R)$、$\mathrm{rD}(R)$或 $\mathrm{rgD}(R)$.

对偶于上节定理 4,我们有如下结果.

定理 6 设 R 为任意环,则在${}_R\mathfrak{M}$ 中下述结论成立:

(i) 任何 $M\in{}_R\mathfrak{M}$ 都有内射分解，因此 $M\neq 0$ 时总有确定的 $\mathrm{lid}(M)$（有限或无限）；

(ii) $\mathrm{lid}(M)=0$ 的充分必要条件是 $M\in\mathrm{Inj}_R\mathfrak{M}$；

$\mathrm{lid}(M)\leqslant 1$ 的充分必要条件是有 $E^0,E^1\in\mathrm{Inj}_R\mathfrak{M}$ 及满同态 $f\in\mathrm{Hom}_R(E^0\to E^1)$ 使 $M\simeq\mathrm{Ker}f$；

(iii) $\mathrm{liD}(R)=0$ 的充分必要条件是一切左 R－模都是内射的，即，$\mathrm{Inj}_R\mathfrak{M}={}_R\mathfrak{M}$；

(iv) $\mathrm{liD}(R)\leqslant 1$ 的充分必要条件是任何内射左 R－模的商模都是内射的.

证 (i) 事实上已由定理 5 给出.

(ii) 对偶于上节定理 4(ii)之证. 由定义 4 又可得(iii).

为证(iv)，先证对偶于上节命题 6（Schanuel 引理）的下述结果. 我们用对偶于上节命题 6 之证的方法. □

命题 4 设 $E^1,E^2\in\mathrm{Inj}_R\mathfrak{M}$ 且有左 R－模正合列

$$0\to M\xrightarrow{i^1}E^1\xrightarrow{\pi^1}C^1\to 0$$

$$0\to M\xrightarrow{i^2}E^2\xrightarrow{\pi^2}C^2\to 0$$

则有左 R－模同构

$$C^1\oplus E^2\simeq C^2\oplus E^1$$

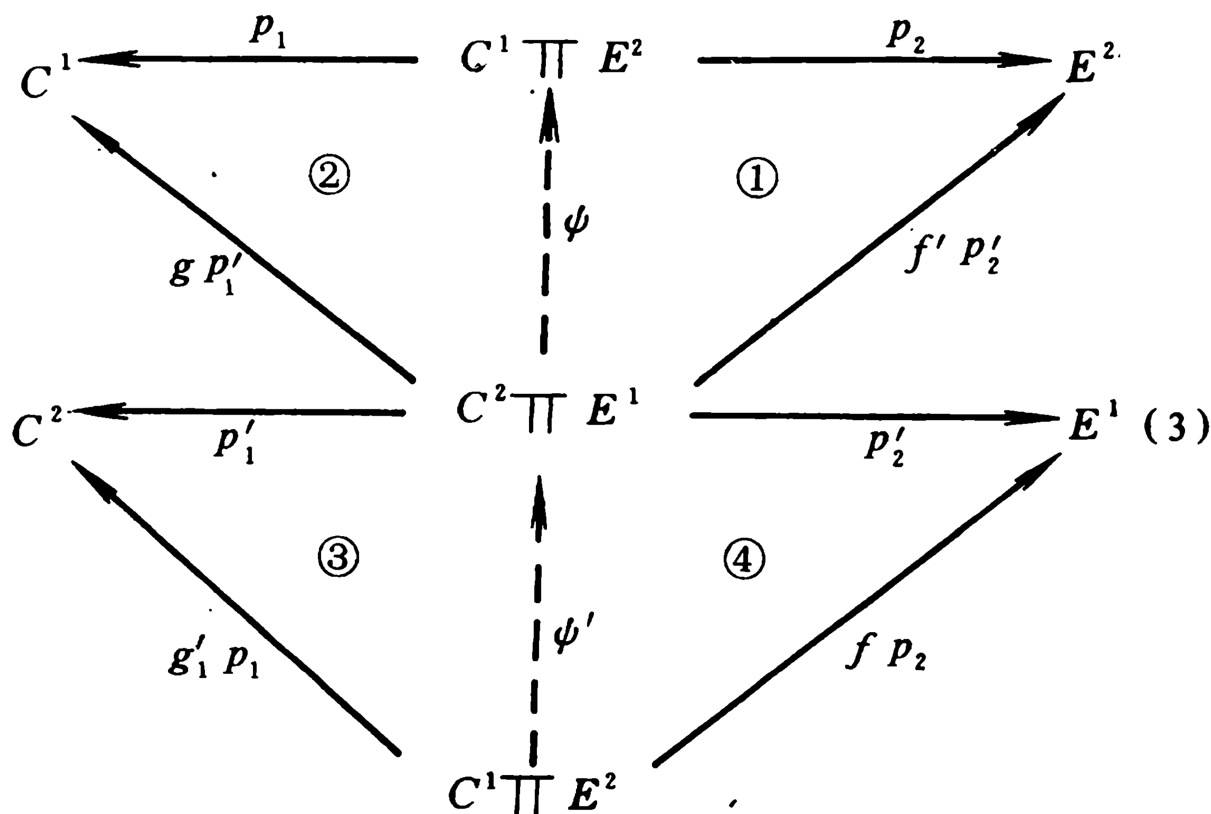
因此 $C^1\in\mathrm{Inj}_R\mathfrak{M}\Leftrightarrow C^2\in\mathrm{Inj}_R\mathfrak{M}$.

证 考察下面的实箭头图

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{i^1} & E^1 & \xrightarrow{\pi^1} & C^1 & \longrightarrow & 0\\
 & & {\scriptstyle I_M}\uparrow & ① & {\scriptstyle f}\uparrow\downarrow{\scriptstyle f'} & & {\scriptstyle g}\uparrow\downarrow{\scriptstyle g'} & & \\
0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{i^2} & E^2 & \xrightarrow{\pi^2} & C^2 & \longrightarrow & 0
\end{array}\qquad(2)$$

由 $E^1 \in \mathrm{Inj}_R\mathfrak{M}$ 知,必有 $f \in \mathrm{Hom}_R(E^2, E^1)$ 使图(2)中方孔①为交换图,即 $i^1 = fi^2$. 由上章§4命题1°(或直接用图追踪)知,必有 $g \in \mathrm{Hom}_R(C^2, C^1)$ 使图(2)对纵向箭头 g, f, I_M 成交换图. 同理由 $E^2 \in \mathrm{Inj}_R\mathfrak{M}$ 知有 $f' \in \mathrm{Hom}_R(E^1, E^2)$ 与 $g' \in \mathrm{Hom}_R(C^1, C^2)$ 使图(2)关于 g', f', I_M 也成交换图.

再来看下面的图(3)(为方便起见,在两项直和中用 ∐ 代替 ⊕):



由直积的泛性质($\mathrm{UP}_{\amalg}$,见上章§6)知,必有左 R-模同态 $\psi: C^2 \amalg E^1 \to C^1 \amalg E^2$ 使图(3)之①、②为交换图. 同理有左 R-模同态 $\psi': C^1 \amalg E^2 \to C^2 \amalg E^1$ 使图(3)的③、④为交换图. 但由直积泛性质所述的唯一性知

$$\psi\psi' = I_{C^1 \amalg E^2}$$

$$\psi'\psi = I_{C^2 \amalg E^1}$$

由此知 ψ 为左 R-模同构,命题证毕. □

定理 6(iv)之证 用命题 4 对偶于上节定理 3 之证法. 这里从

略.但建议读者作为练习试着补出详细证明.

对上节的 Schanuel 引理(上节命题 6)与它的对偶形式(本节命题 4)容易用数学归纳法推广为下述形式.

命题 5　设 R 为任意环,$M\in {}_R\mathfrak{M}$,则

(i) 当

$$0\to K_{n-1}\to P_{n-1}\xrightarrow{d_{n-1}}P_{n-2}\to\cdots\to P_0\xrightarrow{d_0}M\to 0$$

$$0\to K'_{n-1}\to P'_{n-1}\xrightarrow{d'_{n-1}}P'_{n-2}\to\cdots\to P'_0\xrightarrow{d'_0}M\to 0$$

都是${}_R\mathfrak{M}$ 中的正合列且 $P_j,P'_j\in \mathrm{P}_R\mathfrak{M},j=0,1,\cdots,n-1$ 时,必有左 R-模同构

$$K_{n-1}\oplus P'_{n-1}\oplus P_{n-2}\oplus P'_{n-3}\oplus\cdots\oplus C$$
$$\simeq K'_{n-1}\oplus P_{n-1}\oplus P'_{n-2}\oplus\cdots\oplus C'$$

其中 n 为偶数时,$C=P_0,C'=P'_0$;n 为奇数时,$C=P'_0,C'=P_0$.因此 $K_{n-1}\in \mathrm{P}_R\mathfrak{M}\Leftrightarrow K'_{n-1}\in \mathrm{P}_R\mathfrak{M}$.

(i)° 当

$$0\to M\to E^0\xrightarrow{d^0}E^1\xrightarrow{d^1}E^2\to\cdots\to E^{n-1}\xrightarrow{d^{n-1}}C^{n-1}\to 0$$

$$0\to M\to E^{0'}\xrightarrow{d^{0'}}E^{1'}\xrightarrow{d^{1'}}E^{2'}\to\cdots\to E^{n-1'}\xrightarrow{d^{n-1'}}C^{n-1'}\to 0$$

都是${}_R\mathfrak{M}$ 中的正合列且 $E^j,E^{j'}\in \mathrm{Inj}_R\mathfrak{M},j=0,1,\cdots,n-1$ 时,必有左 R-模同构

$$C^{n-1}\oplus E^{n-1'}\oplus E^{n-2}\oplus\cdots\oplus D\simeq C^{n-1'}\oplus E^{n-1}\oplus E^{n-2'}\oplus\cdots\oplus D'$$

其中 n 为偶数时 $D=E^0,D'=E^{0'}$;n 为奇数时,$D=E^{0'},D'=E^0$.因此 $C^{n-1}\in \mathrm{Inj}_R\mathfrak{M}\Leftrightarrow C^{n-1'}\in \mathrm{Inj}_R\mathfrak{M}$.

用命题 5 可证如下结果.

定理 7　在${}_R\mathfrak{M}$ 中设 $M\in {}_R\mathfrak{M},n\geqslant 0$,则下述各点是等价的:

(i) M 有长为 n 的投射分解$\{P_j,d_j\}$:

$$0\to P_n\xrightarrow{d_n}P_{n-1}\xrightarrow{d_{n-1}}P_{n-2}\to\cdots\to P_1\xrightarrow{d_1}P_0\xrightarrow{d_0}M\to 0$$

(ii) 设$\{P'_j,d'_j\}$为 M 的任一投射分解,则

$$\mathrm{Im}d'_n = \mathrm{Ker}d'_{n-1} \in \mathrm{P}_R\mathfrak{M}$$

(iii) 设 $0 \to \overline{K}_{n-1} \to \overline{P}_{n-1} \to \cdots \to \overline{P}_1 \to \overline{P}_0 \to M \to 0$

为正合列，$\overline{P}_j \in \mathrm{P}_R\mathfrak{M}$，$j = 0, 1, \cdots, n-1$，则 $\overline{K}_{n-1} \in \mathrm{P}_R\mathfrak{M}$；

(iv) $\mathrm{lpd}(M) \leqslant n$.

证 由命题 5 知，(i)、(ii)、(iii)是等价的. 由 $\mathrm{lpd}(M)$的定义知(i)与(iv)是等价的. □

定理 7° 在$_R\mathfrak{M}$中设 $M \in {}_R\mathfrak{M}$，$n \geqslant 0$，则下述各点是等价的：

(i) M 有长为 n 的内射分解$\{E^j, d^j\}$：

$$0 \to M \to E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \to \cdots \to E^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} E^n \to 0$$

(ii) 设$\{E^{j\prime}, d^{j\prime}\}$为 M 的任一内射分解，则

$$\mathrm{Ker}d^{n\prime} = \mathrm{Im}d^{n-1\prime} \in \mathrm{Inj}_R\mathfrak{M}$$

(iii) 设 $0 \to M \to \overline{E}^0 \to \overline{E}^1 \to \overline{E}^2 \to \cdots \to \overline{E}^{n-1} \to \overline{C}^{n-1} \to 0$

为正合列，$\overline{E}^j \in \mathrm{Inj}_R\mathfrak{M}$，$j = 0, 1, \cdots, n-1$，则 $\overline{C}^{n-1} \in \mathrm{Inj}_R\mathfrak{M}$；

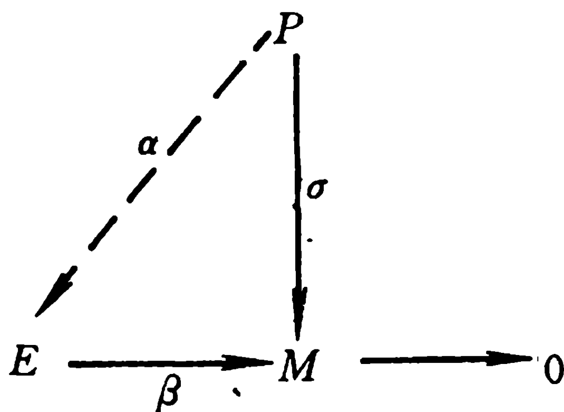
(iv) $\mathrm{lid}(M) \leqslant n$.

证 由命题 5 知(i)、(ii)、(iii)是等价的. 由 $\mathrm{lid}(M)$的定义知(i)与(iv)是等价的. □

投射模与内射模的对偶性决定着它们必然有紧密的联系. 下面我们给出它们的另一些重要关系.

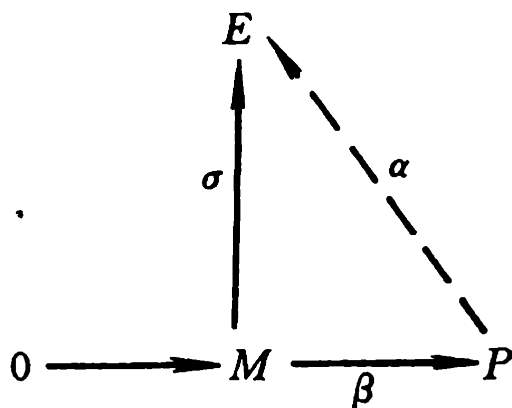
定理 8 对任意环 R，在$_R\mathfrak{M}$中有如下结果：

(i) $P \in \mathrm{P}_R\mathfrak{M}$ 的充分必要条件是对任意的下图



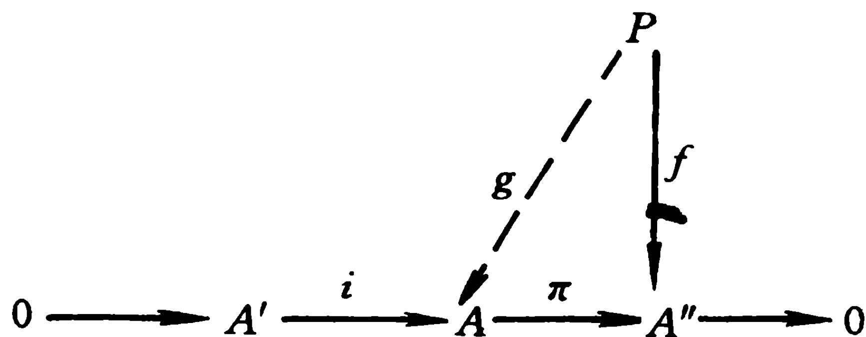
其中 $E\in \mathrm{Inj}_R\mathfrak{M}$, β 为满同态,必有 $\alpha\in \mathrm{Hom}_R(P,E)$ 使成交换图;

(i)° $E\in \mathrm{Inj}_R\mathfrak{M}$ 的充分必要条件是对任意的下图



其中 $P\in \mathrm{P}_R\mathfrak{M}$, β 为单同态,必有 $\alpha\in \mathrm{Hom}_R(P,E)$ 使成交换图.

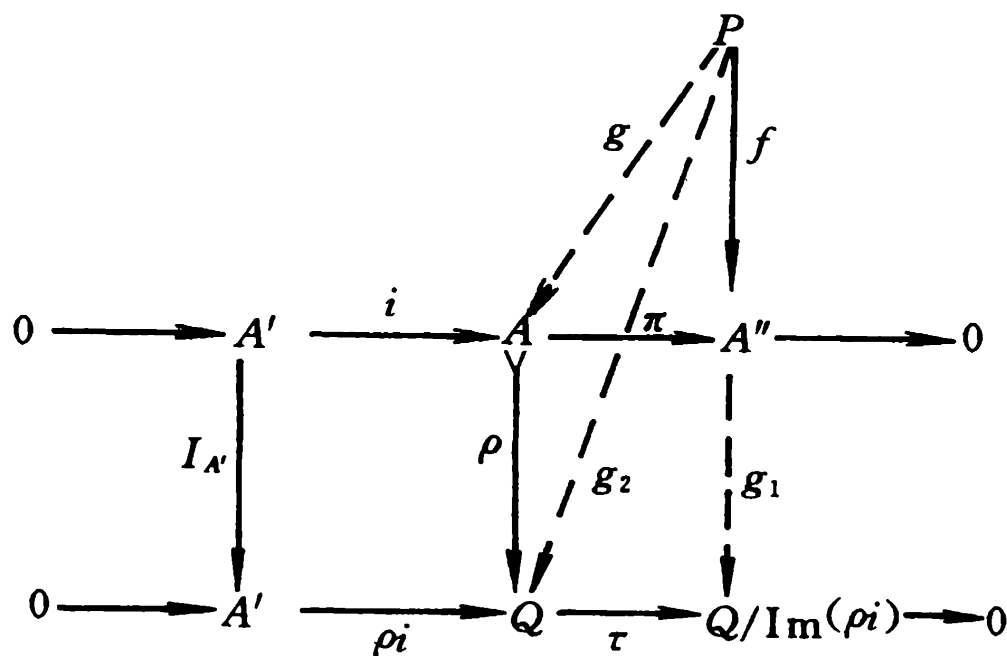
证 (i) 必要性是当然的. 下证充分性. 即证对任意的行正合的下图



必有 $g\in \mathrm{Hom}_R(P,A)$ 使成交换图即可.

事实上,由定理 5 知,必有 $Q\in \mathrm{Inj}_R\mathfrak{M}$,使有单同态 $\rho\in \mathrm{Hom}_R(A,Q)$. 于是有实箭头所示的行正合交换图(见下页). 由上章 §4 命题 1°知,必有 $g_1\in \mathrm{Hom}_R(A'',Q/\mathrm{Im}(\rho i))$ 使此图之右网孔为交换图,即, $g_1\pi=\tau\rho$. 此时已有 $g_1 f\in \mathrm{Hom}_R(P,Q/\mathrm{Im}(\rho i))$. 于是由 $Q\in \mathrm{Inj}_R\mathfrak{M}$ 用(i)之(充分)条件知,必有 $g_2\in \mathrm{Hom}_R(P,Q)$ 使 $\tau g_2=g_1 f$. 但由图追踪知:

当 $g_2(p)=0$, $p\in P$ 时 $\xrightarrow[\rho\text{单同态}]{}$ $\exists\,|\,a\in A$ 且 $a=0$ 使 $\rho(a)$



$=g_2(p)=0$;

当 $g_2(p)\neq 0,\ p\in P$ 时 $\xRightarrow[\tau g_2=g_1 f]{} \tau g_2(p)=g_1 f(p)$

$\xlongequal[\substack{\pi\text{ 满}\Rightarrow\exists\\ a_0\in A\text{ 使}\\ f(p)=\pi(a_0)}]{} g_1\pi(a_0)\xlongequal[g_1\pi=\tau\rho]{}\tau\rho(a_0)\Rightarrow g_2(p)-\rho(a_0)\in\operatorname{Ker}\tau$

$\xlongequal[\text{下行正合}]{}\operatorname{Im}\rho i\subseteq\operatorname{Im}\rho\Rightarrow g_2(p)\in\operatorname{Im}\rho\xRightarrow[\rho\text{ 单}]{}\exists\,|\,a\in A$ 使 $g_2(p)=\rho(a)$.

因此令 $g:P\to A$ 使 $g(p)=a$，则 g 为完全确定的($g(0)=0$)左 R－模同态，且

$$\rho g(p)=\rho(a)=g_2(p),\quad \forall p\in P$$

即 $\rho g=g_2$. 由此得

$$g_1 f=\tau g_2=\tau\rho g\xlongequal[g_1\pi=\tau\rho]{}g_1\pi g$$

但由五引理(上章§4 定理 2)(将上图上下行之右各加一项 0,0 与 0 之间标以同态"0")知，g_1 为单同态. 于是由上式有 $f=\pi g$. 充分性证毕.

(i)°的必要性也是当然的，充分性虽然也可对偶于上段证明给出，但更简捷地不如用下法：

充分性:取 $P=R$ 由定理 1 即得证. □

由定理 8 可得两个有趣的结果表如下面的定理.

定理 9 对任意环 R,在$_R\mathfrak{M}$ 中有如下结果.

(Ⅰ) 下述各点是等价的:

(i) 一切左 R - 模都是投射模,即 $\mathrm{lpD}(R)=0$;

(ii) 一切左 R - 模都是内射模,即 $\mathrm{liD}(R)=0$;

(iii) 一切左 R - 模短正合列都是可裂的;

(iv) 每一左 R - 模的任一子模都是其直和项;

(v) 每一左 R - 模的任一商模都是其直和项;

(vi) $\mathrm{lpD}(R)=\mathrm{liD}(R)=0$.

(Ⅱ) 下述各点是等价的(H. Cartan - S. Eilenberg 结果):

(i) 一切投射左 R - 模的子模都是投射模;

(ii) 一切内射左 R - 模的商模都是内射模;

(iii) $\mathrm{lpD}(R)\leqslant 1$;

(iv) $\mathrm{liD}(R)\leqslant 1$;

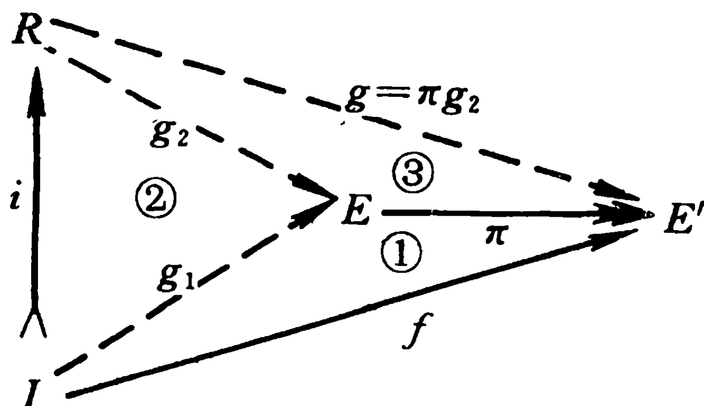
(v) $\mathrm{lpD}(R)=\mathrm{liD}(R)\leqslant 1$;

(vi) R 的每一个左理想都是投射模.

证 (Ⅰ). 由本节定理 1 与上节定理 1 知(i)⇔(iii)⇔(ii). 而(iv)⇔(iii)⇔(v)是显见的. 又由(i)⇔(ii)知(i)⇔(vi).

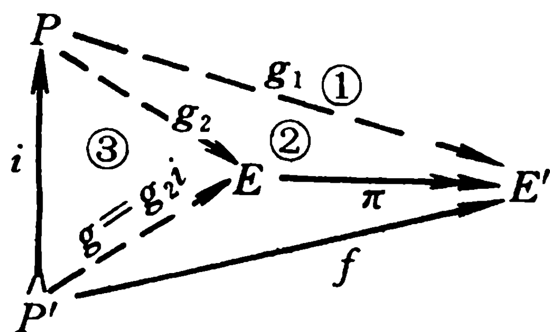
(Ⅱ). (i)⇔(iii)与(ii)⇔(iv)即上节定理 3(iv)与本节定理 6(iv). 由于 $R\in \mathrm{P}_R\mathfrak{M}$, (i)⇒(vi)是当然的. 又(iii)⇔(iv)(即(i)⇔(ii))蕴含着(iii)⇔(v). 因此只需再证(vi)⇒(ii)与(ii)⇒(i).

(vi)⇒(ii):设 $E\in \mathrm{Inj}_R\mathfrak{M}$, E'为 E 的任一商模,则有满同态 $\pi:E\twoheadrightarrow E'$. 取 I 为 R 的任一左理想,则有单同态 $i:I\rightarrowtail R$. 为证 $E'\in \mathrm{Inj}_R\mathfrak{M}$,只需对任意的 $f\in \mathrm{Hom}_R(I,E')$ 找出 $g\in \mathrm{Hom}_R(R,E')$ 使 $gi=f$. 为此考察实箭头组成的下图:



由(vi)知 $I\in \mathrm{P}_R\mathfrak{M}$,因此有 g_1 使①为交换图.再由 $E\in \mathrm{Inj}_R\mathfrak{M}$ 知有 g_2 使②为交换图.于是取 $g=\pi g_2$ 则使③为交换图.从而使加上虚箭头后的上图为交换图.故有 $gi=f$.

(ii)⇒(i):设 P' 为任一投射左 R-模 P 的子模,则有单同态 $i:P'\rightarrowtail P$.由定理 8 知,为证 $P'\in \mathrm{P}_R\mathfrak{M}$ 只需任取 $E\in \mathrm{Inj}_R\mathfrak{M}$ 及其商模 E'(由(ii)知 $E'\in \mathrm{Inj}_R\mathfrak{M}$),令 $\pi:E\twoheadrightarrow E'$ 为标准满同态,再任给 $f\in \mathrm{Hom}_R(P',E')$ 来证有同态 g 使 $\pi g=f$.为此,对偶于上段考察实箭头组成的下图.



由 $E'\in \mathrm{Inj}_R\mathfrak{M}$ 知必有 g_1 使 $g_1 i=f$,即外三角图为交换图.由 $P\in \mathrm{P}_R\mathfrak{M}$ 知,必有 g_2 使②为交换图,于是取 $g=g_2 i$ 则使③成交换图.从而使加上这三个虚箭头的上图为交换图.故 $\pi g=f$. □

定理 9 遗下两个需回答的问题:$\mathrm{lpD}(R)=0$ 与 $\mathrm{rpD}(R)=0$ 关系如何? $\mathrm{lpD}(R)\leqslant 1$ 与 $\mathrm{rpD}(R)\leqslant 1$ 关系如何? 为回答这两个问题,先引入如下定义.

定义 5 设 R 为任意环.若 $M\in {}_R\mathfrak{M}(\mathfrak{M}_R)$ 无 0,M 之外的子模,则称 M 为**单模**(simple module).可分解为单模直和的 $M\in {}_R\mathfrak{M}(\mathfrak{M}_R)$ 称为**半单模**(semisimple module).

若 R 作为左(右)R－模为半单模，则称 R 为(左(右))Artin **半单环**，也简称为**半单环**(semisimple ring)．记为 $R\in\mathrm{SS}$，不再区分左、右(理由在下面的定理 10 中给出)．

若 R 的一切左(右)理想都是投射左(右)R－模，则 R 称为**左(右)遗传环**(left (right) hereditary ring)，记为 $R\in\mathrm{LH}(\mathrm{RH})$．

下面的定理 10 将指出左半单环与右半单环是一回事．但左、右遗传环则不然．1966 年 L. Small 在[Sm,66]中给出一个例子

$$R=\begin{pmatrix}\mathbb{Z} & \mathbb{Q}\\ 0 & \mathbb{Q}\end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix}z & q\\ 0 & q_1\end{pmatrix}\middle|\, z\in\mathbb{Z},q,q_1\in\mathbb{Q}\right\}$$

说明 R 为右 Noether 环且为右遗传环，但 R 不是左 Noether 环，也不是左遗传环．当然，对交换环不会出现这种情况，此时 $\mathrm{lpD}(R)=\mathrm{rpD}(R)$，将统记为 $\mathrm{gD}(R)$或 $\mathrm{pD}(R)$．下面来证明如下的定理．

定理 10 对任意环 R，下述各点是等价的：

(i)((i)′)R 为左(右)Artin 半单环；

(ii)((ii)′)一切左(右)R－模都是半单模；

(iii)((iii)′)一切左(右)R－模都是投射模；

(iv)((iv)′)$\mathrm{lpD}(R)=0$ $(\mathrm{rpD}(R)=0)$；

(v)((v)′)$\mathrm{liD}(R)=0$ $(\mathrm{riD}(R)=0)$；

(vi)((vi)′)一切左(右)R－模都是内射模．

证 先证(i)——(vi)的等价性，同理可得(i)′——(vi)′的等价性，再来证(i)⇔(i)′即可．

(i)⇒(ii)：任取 $M\in{}_R\mathfrak{M}$，则有 $\coprod\limits_{j\in J}R\in\mathrm{Free}_R\mathfrak{M}$ 使在${}_R\mathfrak{M}$ 中有正合列

$$0\to\mathrm{Ker}\,\pi\to\coprod_{j\in J}R\xrightarrow{\pi}M\to0 \tag{2}$$

由 R 半单知 $\coprod\limits_{j\in J}R$ 为单模的直和，因此也是半单的．从而由半单模的定义可看出 $\mathrm{Ker}\,\pi<\coprod\limits_{j\in J}R$ 也是半单的．由此可知，

$$M\simeq\coprod_{j\in J}R/\mathrm{Ker}\,\pi$$

是半单的．

(ii)⇒(iii)：任取 $M\in{}_R\mathfrak{M}$，上段证明中的正合列(2)仍是存在的．此时由 $\mathrm{Ker}\pi$、$\coprod_{j\in J}R$ 都是单模的直和知，$\mathrm{Ker}\pi$ 为 $\coprod_{j\in J}R$ 的直和项．因此(2)是可裂的，从而 M 为自由模 $\coprod_{j\in J}R$ 的直和项．于是 $M\in \mathrm{P}_R\mathfrak{M}$．

(iii)⇒(iv)是显见的．

(iv)⇒(v)已由定理 9 得出．

(v)⇒(vi)是显见的．

(vi)⇒(i)：设(vi)成立，则由定理 9 知，R 的任意左 R－子模(左理想)都是 R 的直和项．取 U 为 R 的一切单子模之和．由于两个单子模或相等或交为 0．于是 U 为单模的直和，由此知有 $N\in{}_R\mathfrak{M}$ 使

$$R=U\oplus N$$

下面只需证明：若 $N\neq 0$，则 N 有单子模 $K\neq 0$．这样由 $K\subseteq U\cap N=0$ 即得出矛盾．

事实上，R 必有含 U 的极大左 R－子模(极大左理想)M．于是由定理 9 又知有 $N_1\in{}_R\mathfrak{M}$ 使

$$R=M\oplus N_1,M\supseteq U,N\supseteq N_1\neq 0$$

由 M 的极大性知 $N_1\simeq R/M$ 必为单子模，取 $K=N_1$ 即得(i)．

为证(i)⇔(i)′，当然只需证(i)⇒(i)′．

由 R 有单位元 1 知，从(i)得到的 R 的单子模直和表示必为有限直和．从上章 §6 知，必有 R 的非零幂等元 $e_j^2=e_j$，$j=1,2,\cdots,n$ 使 $1=\sum_{j=1}^{n}e_j$，$e_ie_j=\delta_{ij}e_i$，且有

$$R=\bigoplus_{j=1}^{n}Re_j$$

但由 $1=\sum_{j=1}^{n}e_j$ 又知 $R=\sum_{j=1}^{n}e_jR$(R 写在 e_j 的右边了！)．若有

$$0\neq r\in e_{i_0}R\cap\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i_0}}^{n}e_jR$$

我们令 $r=e_{i_0}r_0$，则有 $e_{i_0}r=e_{i_0}^2r_0=e_{i_0}r_0=r$. 又 r 作为上面交集的元素又可写成

$$r=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i_0}}^{n}e_jr_j$$

从而由 $e_{i_0}r=r$ 得

$$r=e_{i_0}r=e_{i_0}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i_0}}^{n}e_jr_j=0$$

所以上述的和事实上是直和：

$$R=\bigoplus_{j=1}^{n}e_jR$$

下面为证(i)′，只需证 e_jR 都是单模. 为此任取 $0\neq a\in e_jR$，则有 $b\in R$ 使 $a=e_jb$. 同上证知

$$e_ja=e_j^2b=e_jb=a$$

若能证 $aR=e_jR$ 则知 e_jR 为单模.

事实上，Re_j 为单模，于是左 R - 模满同态

$$\varphi: Re_j\twoheadrightarrow Ra$$

只能为同构(因 $a\neq 0$, $\mathrm{Ker}\varphi$ 只能为 0). 于是 Ra 为 $R\in{}_R\mathfrak{M}$ 的单子模. 因此可设

$$R=Ra\oplus V$$

由此又得左 R - 模 R 的自同态

$$\psi: R=Ra\oplus V\rightarrow R$$

$$ra+v\longmapsto re_j,\quad \forall v\in V, r\in R$$

但左 R - 模 R 的自同态都显然地可看成是右乘. 故有 $b_1\in R$ 使 $e_j=\psi(a)=ab_1$. 由此知 $e_j\in aR$. 于是 $aR=e_jR$. □

定理 9 与定理 10 给出了 Artin 半单环(不必再分左、右)的多种特征刻画. 其中之一是: $\mathrm{lpD}(R)=\mathrm{liD}(R)=0$. 而定理 9 又给出左遗传环的与此相关的特征刻画: $\mathrm{lpD}(R)=\mathrm{liD}(R)\leqslant 1$. 以后我们将证明 $\mathrm{lpD}(R)$ 与 $\mathrm{liD}(R)$ 总是相等的. 它们是度量环与半单环差

距的一个同调不变量.从这个意义上来说,左、右遗传环是“最接近”半单环的环类.

习 题 2.2

1 设 R 为任意环,$M\in{}_R\mathfrak{M}$.证明下述各点是等价的:

(i)每一个左 R-模 X 都是 M-投射的;

(ii)每一个左 R-模 X 都是 M-内射的;

(iii)每一个单左 R-模都是 M-投射的;

(iv)M 是半单的.

(建议:考虑正合列 $0\to K\to M\to N\to 0$ 的可裂性与 K 是 M-内射的(N 是 M-投射的)关系).

2. 用对偶于上节定理 3(iv)之证法证明本节定理 6(iv).

3 证明:

(i)若 D 为可除 Abel 群,则 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(D,\mathbb{Z}_n)=0$;

(ii) 非零的内射 Abel 群必不是投射$\mathbb{Z}$-模,因此更不是自由 Abel 群.

4. 证明:对任意环 R,单 R-模 M 必是循环模,且它的任意非零元都生成 M.

5. 证明:对任意环 R,若 $M\in{}_R\mathfrak{M}$ 是单模之和,则 M 必是半单的.

§3 平坦模与弱维数

从上章§5 定理 2 我们已经知道 $M\underset{R}{\otimes}$—与—$\underset{R}{\otimes}N$ 都是右正合共变函子.但由该节注③又知,一般地,它们都不是左正合的,因此都不是正合的.为便于研究 M,N 满足何种条件才能保证上述函子是正合的,我们引入如下概念.

定义 1 设 R 为任意环$B\in\mathfrak{M}_R$.若 $B\underset{R}{\otimes}$—为正合函子,则称 B 为**平坦右 R-模**,简称**平坦模**(flat module),记为 $B\in\mathrm{Flat}\mathfrak{M}_R$.

类似地可定义平坦左 R-模.它们的理论是平行的,为方便起见,下面主要讨论平坦右 R-模.

由定义 1 可得如下命题.

命题 1　设 R 为任意环，$B\in\mathfrak{M}_R$，则 $B\in \mathrm{Flat}\mathfrak{M}_R$ 的充分必要条件是对${}_R\mathfrak{M}$ 中任意的单同态 f，$I_B\otimes f$ 也是单同态.

证　由上章 §5 已知 $B\underset{R}{\otimes}$—为右正合的，于是 $B\underset{R}{\otimes}$—正合（即 $B\in\mathrm{Flat}\mathfrak{M}_R$）的充分必要条件是 $B\underset{R}{\otimes}$—保持单同态，即 f 单时 $I_B\otimes f$ 也单.　□

命题 2　$R\in\mathrm{Flat}\mathfrak{M}_R$ 且 $R\in\mathrm{Flat}_R\mathfrak{M}$，即对任一环 R，R 作为左、右 R－模都是平坦的.

证　设 $f:A'\to A$ 为${}_R\mathfrak{M}$ 中的单同态.来证 $I_R\otimes f$ 单即可（由命题 1）.事实上，我们有交换图（两竖直箭头为同构）：

$$\begin{array}{ccccccc}
ra' & & A' & \overset{f}{\rightarrowtail} & A & & ra \\
\downarrow & & \downarrow\simeq & & \simeq\downarrow & & \downarrow \\
r\otimes a' & & R\underset{R}{\otimes}A' & \xrightarrow{I_R\otimes f} & R\underset{R}{\otimes}A & & r\otimes a
\end{array}$$

由此即知 $I_R\otimes f$ 是单的.　□

例 1　由上章 §5 例 3 或 §3 例 5 已知 $B=\mathbb{Z}_2=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 不保持单同态 $f:\mathbb{Z}\rightarrowtail\mathbb{Q}$，因而 $\mathbb{Z}_2\notin\mathrm{Flat}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M}$.同理知对任何 $n\in\mathbb{Z}$，$n>0$，$\mathbb{Z}_n\notin\mathrm{Flat}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M}$.

下面我们希望知道自由模、投射模是否一定为平坦的.由命题 2 知，这自然需要研究平坦性在直和之下是否保持.为此我们先证如下结果.

定理 1　设 R 为任意环，$B_j\in\mathfrak{M}_R$，$\forall j\in J$.则

$$\coprod_{j\in J}B_j\in\mathrm{Flat}\mathfrak{M}_R\Leftrightarrow B_j\in\mathrm{Flat}\mathfrak{M}_R,\quad \forall j\in J$$

证　在${}_R\mathfrak{M}$ 中，若 $f_j:A'_j\to A_j$，$\forall j\in J$，则由直和的泛性质（$\mathrm{UP}_{\amalg}$）知（见上章 §6），必有唯一的 $\varphi=\amalg f_j$ 使下图为交换图.

$$\begin{array}{ccccc} A'_j & \xrightarrow{f_j} & A_j & \xrightarrow{\lambda_j} & \coprod_{j\in J} A_j \\ & \searrow^{\lambda'_j} & & & \uparrow \exists \varphi \\ & & & & \coprod_{j\in J} A'_j \end{array}$$

其中$(\coprod f_j)((a'_j))=(f_j(a'_j))$,因此$\coprod f_j$ 单$\Leftrightarrow f_j$ 单,$\forall j\in J$.

由上章§7定理5容易看出,对任意的 $f:A'\rightarrowtail A$($_R\mathfrak{M}$ 中的单同态)有交换图:

$$\begin{array}{ccc} (\coprod_{j\in J} B_j)\otimes_R A' & \xrightarrow{I_{\coprod B_j}\otimes f} & (\coprod_{j\in J} B_j)\otimes_R A \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ \coprod_{j\in J}(B_j\otimes_R A') & \xrightarrow[\coprod(I_{B_j}\otimes f)]{} & \coprod_{j\in J}(B_j\otimes_R A) \end{array}$$

注意两竖直箭头表示同构. 因此 $I_{\coprod B_j}\otimes f$ 单$\Leftrightarrow\coprod(I_{B_j}\otimes f)$单$\Leftrightarrow I_{B_j}\otimes f$ 单,$\forall j\in J$. 但由命题1知,$I_{\coprod B_j}\otimes f$ 单$\Leftrightarrow\coprod B_j\in\mathrm{Flat}\mathfrak{M}_R$;$I_{B_j}\otimes f$ 单$\Leftrightarrow B_j\in\mathrm{Flat}\mathfrak{M}_R$,$\forall j\in J$. 由此即得欲证. □

由定理1可得

定理2 对任意环 R,$\mathrm{P}\mathfrak{M}_R\subseteq\mathrm{Flat}\mathfrak{M}_R$. 因此任意 R-模 M 都有平坦分解. 即有下形的 $\mathfrak{M}_R$ 正合列

$$\cdots\to F_n\to F_{n-1}\to\cdots\to F_1\to F_0\to M\to 0$$

其中 F_j 都是平坦的,$j=0,1,\cdots$.

证 由命题2知 $R\in\mathrm{Flat}\mathfrak{M}_R$,再由定理1知 $\coprod_{j\in J}R\in\mathrm{Flat}\mathfrak{M}_R$,即自由模都是平坦的. 由于投射模为自由模的直和项. 再用一次定理1即知 $\mathrm{P}\mathfrak{M}_R\subseteq\mathrm{Flat}\mathfrak{M}_R$.

由此知,投射分解都是平坦分解,因此 M 的平坦分解总是存

在的. □

注 1 记 $\mathrm{Free}\mathfrak{M}_R$ 为自由右 R－模类,则有

$$\mathrm{Free}\mathfrak{M}_R \subsetneqq \mathrm{P}\mathfrak{M}_R \subsetneqq \mathrm{Flat}\mathfrak{M}_R$$

前一个"$\neq$"已由本章 §1 例 1 说明.后一个"$\neq$"可用$\mathbb{Q}\in {}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M}$来说明.可以证明(见下章 §4 例 1):$\mathbb{Q}\in \mathrm{Flat}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M}$ 但$\mathbb{Q}\notin \mathrm{P}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M}$(注意$\mathbb{Z}$是交换环,这里的${}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M}$ 当然可写成 $\mathfrak{M}_{\mathbb{Z}}$).

由定理 2 我们可仿投射维数与内射维数的定义给出

定义 2 在 $\mathfrak{M}_R$ 中对任意的$M\in\mathfrak{M}_R$,记

$$\mathrm{rfd}(M)=\inf\{n\mid 0\to F_n\to\cdots\to F_1\to F_0\to M\to 0 \text{ 正合},$$
$$F_j\in\mathrm{Flat}\mathfrak{M}_R, j=0,1,\cdots,n\}$$

且称之为 M 的**右平坦维数**(right flat dimension).当上述 n 不存在时,规定 $\mathrm{rfd}(M)=\infty$.

再记

$$\mathrm{rWD}(R)=\sup\{\mathrm{rfd}(M)\mid M\in\mathfrak{M}_R\}$$

称之为环 R 的(**右**)**弱维数**(weak dimension).

类似地可定义 $M\in{}_R\mathfrak{M}$ 的**左平坦维数** $\mathrm{lfd}(M)$以及环 R 的(**左**)**弱维数** $\mathrm{lWD}(R)$.以后将证对任意环 R,$\mathrm{rWD}(R)=\mathrm{lWD}(R)$.到那时将不再区分左、右弱维数,统称为弱维数,且记为 $\mathrm{WD}(R)$.

由定义 2 可得

定理 3 设 R 为任意环,则

(i) $\mathrm{rfd}(M)=0\Leftrightarrow M\in\mathrm{Flat}\mathfrak{M}_R$;

(ii) $\mathrm{rfd}(M)\leqslant 1\Leftrightarrow$有 F_0、$F_1\in\mathrm{Flat}\mathfrak{M}_R$ 使$M\simeq F_0/F_1$;

(iii) $\mathrm{rWD}(R)=0\Leftrightarrow$一切右 R－模都是平坦的(即 R 为下章 §4 中介绍的(von Neumann)正则环);

(iv) $\mathrm{rfd}(M)\leqslant\mathrm{rpd}(M)$, $\forall M\in\mathfrak{M}_R$,因此 $\mathrm{rWD}(R)\leqslant\mathrm{rpD}(R)$(这就是弱维数中"弱"的含意).

证 (i)、(ii)与(iii)都可由定义直接得到.

(iv) 由于 $P\mathfrak{M}_R \subseteq \mathrm{Flat}\mathfrak{M}_R$，$M \in \mathfrak{M}_R$ 的任一投射分解都是平坦分解，因此 $\mathrm{rfd}(M) \leqslant \mathrm{rpd}(M)$. 取上确界即得 $\mathrm{rWD}(R) \leqslant \mathrm{rpD}(R)$.

□

对平坦模与张量积的关系，可作如下的简单分析. 由定义 1 知，$B \in \mathrm{Flat}\mathfrak{M}_R$ 意指 $B \underset{R}{\otimes}$—为正合函子. 由于正合函子的复合当然仍是正合的. 因此有

定理 4 对任意环 R 与 S，设 $B \in {}_S\mathfrak{M}_R$ 且 $B \in \mathrm{Flat}_S\mathfrak{M}$，$C \in \mathrm{Flat}_R\mathfrak{M}$，则 $B \underset{R}{\otimes} C \in \mathrm{Flat}_S\mathfrak{M}$.

特别地，当 R 为交换环，$M, N \in \mathrm{Flat}_R\mathfrak{M}$ 时，$M \underset{R}{\otimes} N$ 仍为平坦 R-模.

关于此定理中的模结构可参看上章 §3 命题 2.

下面来研究平坦模与内射模的关系，为此需先证明同调代数中的一条重要定理. 为简单起见，将 $X \in {}_S\mathfrak{M}_R$ 记为 ${}_SX_R$，将 $X \in {}_R\mathfrak{M}$ 记为 ${}_RX$，对右模也作如此的记法.

定理 5 （伴随同构定理，adjoint isomorphism theorem）.

设 R、S 为任意环，则

(i) 对任意的 $({}_RA, {}_SB_R, {}_SC)$ 有 Abel 群同构

$$\mathrm{Hom}_S(B \underset{R}{\otimes} A, C) \underset{AG}{\overset{\tau}{\simeq}} \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_S(B, C))$$

(ii) 对任意的 $(A_R, {}_RB_S, C_S)$ 有 Abel 群同构

$$\mathrm{Hom}_S(A \underset{R}{\otimes} B, C) \underset{AG}{\overset{\tau'}{\simeq}} \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_S(B, C))$$

且 τ、τ' 都是自然同构（即，固定 A, B, C 中的两个，都是函子间的自然等价）.

证 只需证(i)，(ii)的证明是类似的.

由上章 §3 知，(i)中的 Hom，$\otimes$的作用都是有意义的，比如 $B \underset{R}{\otimes} A \in {}_S\mathfrak{M}$，因此左端的 Hom 有意义.

任取 $a \in A$，$b \in B$，$f \in \mathrm{Hom}_S(B \underset{R}{\otimes} A, C)$，可将 $f(b \otimes a)$ 视为

$$f_a(b)=f(b\otimes a)\in C$$

于是有 $f_a\in \mathrm{Hom}_S(B,C)$.

令 $\bar{f}(a)=f_a$,可验知 $\bar{f}\in \mathrm{Hom}_R(A,\mathrm{Hom}_S(B,C))$. 于是令 $\tau:f\longmapsto \bar{f}$ 即得加法 Abel 群同态

$$\tau:\mathrm{Hom}_S(B\underset{R}{\otimes}A,C)\rightarrow \mathrm{Hom}_R(A,\mathrm{Hom}_S(B,C))$$

再找出 τ 的逆即知 τ 为 Abel 群同构.

事实上, $\forall \bar{g}\in \mathrm{Hom}_R(A,\mathrm{Hom}_S(B,C))$,定义 $\bar{g}':B\underset{R}{\otimes}A\rightarrow C$ 使

$$\bar{g}'(b\otimes a)=\bar{g}(a)(b)$$

令 $\sigma:\bar{g}'\longmapsto \bar{g}'$,则得与 τ 反向的加法 Abel 群同态

$$\sigma:\mathrm{Hom}_R(A,\mathrm{Hom}_S(B,C)\rightarrow \mathrm{Hom}_S(B\underset{R}{\otimes}A,C)$$

只需验证 $\sigma\tau,\tau\sigma$ 都是(各自定义域上的)恒等同态即可. 即对 $\sigma\tau(f)=\bar{f}'$ 证 $\bar{f}'(b\otimes a)=f(b\otimes a)$, $\forall a\in A$, $\forall b\in B$,对 $\tau\sigma(\bar{g})=\overline{\bar{g}'}$ 证 $\overline{\bar{g}'}(a)(b)=\bar{g}(a)(b)$, $\forall a\in A$, $\forall b\in B$. 这都是不难验证的. 即

$$\bar{f}'(b\otimes a)=\bar{f}(a)(b)=f_a(b)=f(b\otimes a)$$

$$\overline{\bar{g}'}(a)(b)=\bar{g}'_a(b)=\bar{g}'(b\otimes a)=\bar{g}(a)(b)$$

此外,由 Hom, $\otimes$ 的性质知,固定 A,B,C 中的两个,两边所得的函子都是自然等价的(可直接验证). □

注 2 D. M. Kan 在[Kan,58]中首次提出更一般的"相伴函子"的概念,集范畴$\mathbb{S}$ 中的指数律是这种概念的主要起源. 所谓指数律即:

设集合 $A,B,C\neq\varnothing$,则有$\mathbb{S}$ 中的等价(等势)

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{S}}(A,\mathrm{Hom}_{\mathbb{S}}(B,C))\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{S}}(A\times B,C)$$

$$\varphi\longmapsto f$$

$$\varphi(a)(b)=f(a,b)=c\in C$$

其中 $A\times B$ 为 A,B 的笛卡尔积.

若记 $X^Y \equiv \mathrm{Hom}_{\mathbb{S}}(Y,X)$，则上面的等价可记为

$$(C^B)^A = C^{A\times B}$$

故称为指数律.

在定理 5(i) 中若记函子 $F = B\underset{R}{\otimes}—: {}_R\mathfrak{M} \to {}_S\mathfrak{M}$，$G = \mathrm{Hom}_S(B,—): {}_S\mathfrak{M} \to {}_R\mathfrak{M}$，则(i)的结果可写成

$$\mathrm{Hom}_S(FA,C) \overset{\tau}{\simeq} \mathrm{Hom}_R(A,GC)$$

同样地在定理 5(ii) 中记 $F' = —\underset{R}{\otimes} B : \mathfrak{M}_R \to \mathfrak{M}_S$，$G' = \mathrm{Hom}_S(B,—): \mathfrak{M}_S \to \mathfrak{M}_R$，则(ii)中的结果即

$$\mathrm{Hom}_S(F'A,C) \overset{\tau'}{\simeq} \mathrm{Hom}_R(A,G'C)$$

于是可抽象出如下定义(1958,D. M. Kan).

定义 3 设 $\mathscr{A},\mathscr{C}$ 为两个范畴，$F: \mathscr{A}\to\mathscr{C}$，$G: \mathscr{C}\to\mathscr{A}$ 为两个共变(反变)函子. 若

(i) 有$\mathbb{S}$中的满单映射

$$\tau = \tau_{A,C}: \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(FA,C) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A,GC),$$
$$\forall A\in \mathrm{Ob}\mathscr{A}, C\in\mathrm{Ob}\mathscr{C}$$

(ii) τ 对每个变元都是自然的，即有下列交换图(即此图的两个网孔都是交换图)

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(FA,C') & \xleftarrow{g_*} & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(FA,C) & \xleftarrow{(Ff)^*} & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(FA',C) \\
\downarrow \tau & & \downarrow \tau & & \downarrow \tau \\
\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A,GC') & \xleftarrow[(Gg)_*]{} & \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A,GC) & \xleftarrow[f^*]{} & \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A',GC)
\end{array}$$

$$\forall f\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A,A'), g\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C,C')$$

(其中记号 $x_*(y) = xy$，$x^*(z) = zx$)，则称函子对(F,G)为一个

伴随对(adjoint pair),也称 F 与 G 是伴随的或 F 左伴随于 G,G 右伴随于 F.

显然,(F,G),(G,H)都为伴随对时(F,H)也为伴随对;(F_j,G_j)为伴随对,$j=1,2$,且 F_1F_2,G_1G_2 合成有意义时,(F_1F_2,G_1G_2)也为伴随对.

定理 5 事实上可表述为下述形式.

命题 3 ($\otimes$与 Hom 的伴随性) 设 R,S 为任意环,则$({}_SB\underset{R}{\otimes}-,\mathrm{Hom}_S({}_SB,-))$对一切${}_SB_R$ 都是伴随对;$(-\underset{R}{\otimes}B_S,\mathrm{Hom}_S(B_S,-))$对一切${}_RB_S$ 都是伴随对.

再来看几个相伴函子.

例 2 令 $F(X)$为以 X 作基的自由群,$\forall X\in\mathrm{Ob}\mathbb{S}$,则 $F:\mathbb{S}\to\mathbb{FG}$(自由群范畴)与 $U:\mathbb{FG}\to\mathbb{S}$(忘却函子)成一伴随对$(F,U)$.

例 3 $ab:\mathbb{G}\to\mathbb{AG}$(参看上章§2 例 1)与嵌入函子 $i:\mathbb{AG}\to\mathbb{G}$ 成一伴随对(ab,i).

例 4 设 $D:\mathbb{S}\to\mathbb{T}\mathrm{op}$ 为使任一集合 X 变成具有离散拓朴(一切子集都是开集)的拓扑空间(因此也使任一集映射变成连续映射——$\mathbb{T}\mathrm{op}$ 中的态射)的函子. $U:\mathbb{T}\mathrm{op}\to\mathbb{S}$ 为忘却函子,则(D,U)为一个伴随对.

注意忘却函子(或部分忘却函子)常可配成伴随对. 再看两个例子.

例 5 设 $F=R\underset{\mathbf{Z}}{\otimes}-:\mathbb{AG}\to{}_R\mathfrak{M}$,$U:{}_R\mathfrak{M}\to\mathbb{AG}$ 为部分忘却函子,则(F,U)为伴随对.

例 6 设 R,S 为环,$F=-\underset{\mathbf{Z}}{\otimes}S:{}_R\mathfrak{M}\to{}_R\mathfrak{M}_S$,$U:{}_R\mathfrak{M}_S\to{}_R\mathfrak{M}$ 为部分忘却函子,则(F,U)为伴随对.

伴随对有许多重要性质,因而有许多重要应用. 比如,可给出左、右正合函子. 即

命题 4 设 R、S 为任意环,$F:{}_R\mathfrak{M}\to{}_S\mathfrak{M}$,$G:{}_S\mathfrak{M}\to{}_R\mathfrak{M}$ 使(F,G)为伴随对. 则 F 必是右正合的,G 必是左正合的,因而它

们都是加法函子.

证 只需对于 F 为共变的情况证明 F 为右正合的(反变情况的证明是类似的). G 的左正合性可用伴随对定义中的自然性条件类似地证明.

现在任取${}_R\mathfrak{M}$ 中正合列

$$A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{\pi'} A'' \to 0$$

来证明

$$FA' \xrightarrow{\alpha} FA \xrightarrow{\beta} FA'' \to 0 \tag{1}$$

为${}_S\mathfrak{M}$ 中的正合列,其中 $\alpha = Ff, \beta = F\pi'$.

由伴随对定义中自然性条件得交换图(其中 $M \in {}_S\mathfrak{M}$ 为任取的)

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \longrightarrow & \mathrm{Hom}_S(FA'', M) & \xrightarrow{\beta^*} & \mathrm{Hom}_S(FA, M) & \xrightarrow{\alpha^*} & \mathrm{Hom}_S(FA', M) \\
& \simeq \downarrow \tau & & \simeq \downarrow \tau & & \simeq \downarrow \tau \\
0 \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(A'', GM) & \xrightarrow{\pi'^*} & \mathrm{Hom}_R(A, GM) & \xrightarrow{f^*} & \mathrm{Hom}_R(A', GM)
\end{array} \tag{2}$$

由函子 $\mathrm{Hom}_R(—, GM)$的反变左正合性知下行是正合的. 又由 τ 为同构并用上图的交换性知上行也是正合的. 于是从 M 的任意性,我们可分三步证明同态列(1)是正合的.

(i) β 满:取 $M = \mathrm{Coker}\beta \equiv FA''/\mathrm{Im}\beta, \pi: FA'' \twoheadrightarrow M$ 为标准同态 $\Rightarrow \beta^* \pi = \pi\beta = 0 \underset{\beta^* \text{单(上行正合)}}{\Longrightarrow} \pi = 0$, 即 $\mathrm{Coker}\beta = 0, \Rightarrow \mathrm{Im}\beta = FA'' \Rightarrow$ β 满.

(ii) $\mathrm{Im}\alpha \subseteq \mathrm{Ker}\beta$(即 $\beta\alpha = 0$):由图(2)之上行正合 $\Rightarrow \alpha^* \beta^* = 0$ $\underset{\substack{\text{取} M = FA'' \\ \pi = I_{FA''}}}{\Longrightarrow} \underset{\substack{\| \\ 0}}{\alpha^* \beta^*} (I_{FA''}) = \alpha^* (I_{FA''}\beta) = I_{FA''}\beta\alpha = \beta\alpha \Rightarrow \beta\alpha = 0.$

(iii) $\mathrm{Ker}\beta \subseteq \mathrm{Im}\alpha$:取 $M = \mathrm{Coker}\alpha \equiv FA/\mathrm{Im}\alpha$, $\pi_1 : FA \twoheadrightarrow M$

为标准同态，来证 $\pi_1(\mathrm{Ker}\beta)=0$ 即可.

事实上，仿(i)之证 $\Rightarrow \alpha^*\pi_1=\pi_1\alpha=0 \Rightarrow \pi_1\in \mathrm{Ker}\alpha^*=\mathrm{Im}\beta^* \Rightarrow \exists\sigma\in \mathrm{Hom}_S(FA'',M)$ 使 $\beta^*\sigma=\pi_1=\sigma\beta \Rightarrow \pi_1(\mathrm{Ker}\beta)=\sigma\beta(\mathrm{Ker}\beta)=0$. □

可以由命题 4 之证得出如下的有趣结果.

推论 1　对任意的环 R，在 $_R\mathfrak{M}(\mathfrak{M}_R)$ 中有如下结果：

(i) $A'\xrightarrow{\alpha}A\xrightarrow{\beta}A''\to 0$ 正合 $\Leftrightarrow 0\to \mathrm{Hom}_R(A'',M)\xrightarrow{\beta^*}\mathrm{Hom}_R(A,M)\xrightarrow{\alpha^*}\mathrm{Hom}_R(A',M)$ 对一切 M 正合 $(\Leftrightarrow 0\to \mathrm{Hom}_R(A'',M)\xrightarrow{\beta^*}\mathrm{Hom}_R(A,M)\xrightarrow{\alpha^*}\mathrm{Hom}_R(A',M)$ 对 $M=\mathrm{Coker}\alpha,\mathrm{Coker}\beta,A''$ 正合)；

(ii) $0\to A'\xrightarrow{\alpha}A\xrightarrow{\beta}A''$ 正合 $\Leftrightarrow 0\to \mathrm{Hom}_R(M,A')\xrightarrow{\alpha_*}\mathrm{Hom}_R(M,A)\xrightarrow{\beta_*}\mathrm{Hom}_R(M,A'')$ 对一切 M 正合.

证(i)、(ii)中"$\Rightarrow$"部分都是已知结果.(i)中"$\Leftarrow$"由命题 4 之证已给出(视那里的 FA',FA,FA'' 为这里的 A',A,A'').(ii)中"$\Leftarrow$"之证是类似的. □

命题 3 与命题 4 又一次地说明了函子$\otimes$的右正合性与函子 Hom 的左正合性.事实上伴随对还有其他的重要作用与性质.可以证明：若(F,G)为伴随对，则不计自然等价的差别时 F 由 G 唯一确定，G 也由 F 唯一确定，且当 F 为全忠实函子(即 $F:\mathscr{A}\to\mathscr{C}$ 将任意的 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A,B)$ 满单地变到 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(FA,FB)$)时，$I_{\mathscr{A}}$ 与 GF 是自然等价的.

利用伴随同构定理(定理 5)可将上节的命题 3 大大推广一步.即

命题 5　设 R、S 为任意环，$E\in \mathrm{Inj}_S\mathfrak{M}$，$B\in {}_S\mathfrak{M}_R$ 且 $B\in \mathrm{Flat}\mathfrak{M}_R$，则 $\mathrm{Hom}_S(B,E)\in \mathrm{Inj}_R\mathfrak{M}$.

证　只需证明 $\mathrm{Hom}_R(-,\mathrm{Hom}_S(B,E))$ 正合(注意 $\mathrm{Hom}_S(B,

$E)\in {}_R\mathfrak{M})$.

事实上,由伴随同构定理知(下式右端的"$\circ$"表函子合成)

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_R(-,\mathrm{Hom}_S(B,E)) &\underset{\text{nat}}{\simeq} \mathrm{Hom}_S(B\underset{R}{\otimes}-,E)\\ &=\mathrm{Hom}_S(-,E)\circ(B\underset{R}{\otimes}-)\end{aligned}$$

由 $E\in \mathrm{Inj}_S\mathfrak{M}$ 知 $\mathrm{Hom}_S(-,E)$ 正合,由 $B\in \mathrm{Flat}\mathfrak{M}_R$ 知 $B\underset{R}{\otimes}-$ 正合.它们合成后仍正合,因此欲证的函子是正合的. □

1973 年 B.L.Osofsky 证明了命题 5 之逆也是成立的.有兴趣的读者可参看[Os,73].

在上节定义 3 中,对 $B\in\mathfrak{M}_R$,我们称

$$B^{\circledast}=\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(B,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\in {}_R\mathfrak{M}$$

为 B 的示性模.并证明了(上节推论 4)$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\in \mathrm{Inj}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M}$.现在我们用示性模将平坦模与内射模沟通起来.为此,先证明如下结果.从中可看出示性模的"示性"作用.

命题 6 在 $\mathfrak{M}_R$ 中,$0\longrightarrow A\xrightarrow{\alpha}B\xrightarrow{\beta}C\longrightarrow 0$ 正合的充分必要条件是

$$0\to C^{\circledast}\xrightarrow{\beta^{\circledast}}B^{\circledast}\xrightarrow{\alpha^{\circledast}}A^{\circledast}\to 0$$

正合.其中对同态 f,$f^{\circledast}$ 表示 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})(f)$.

证 由$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\in \mathrm{Inj}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M}$ 知$\circledast\equiv \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$为反变正合函子.因此必要性证出.

充分性:为记号的方便,只需证:不必假定 $\beta^{\circledast}$ 单及 $\alpha^{\circledast}$ 满,只要 $\mathrm{Ker}\alpha^{\circledast}=\mathrm{Im}\beta^{\circledast}$ 成立必有 $\mathrm{Ker}\beta=\mathrm{Im}\alpha$(注意函子$\circledast$是反变的!).

(i) $\mathrm{Im}\alpha\subseteq\mathrm{Ker}\beta$:

反设有 $a\in A$ 使 $\alpha a\notin\mathrm{Ker}\beta$.即 $\beta\alpha a\neq 0$.令$\langle\beta\alpha a\rangle$为 C(作为加法 Abel 群)的由 $\beta\alpha a$ 生成的循环子群.定义

$$f:\langle\beta\alpha a\rangle\to\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

使

$$f(\beta\alpha a)=\begin{cases}\frac{1}{2}+\mathbb{Z}, \text{当 } \operatorname{ord}(\beta\alpha a)=\infty \text{时}\\ \frac{1}{n}+\mathbb{Z}, \text{当 } \operatorname{ord}(\beta\alpha a)=n \text{ 时}\end{cases}$$

则 $0\neq f\in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\langle\beta\alpha a\rangle,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. 但$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\in \mathrm{Inj}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M}$，于是 f 可开拓为 $0\neq f'\in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})=C^{\circledast}$. 因此 $f'\beta\alpha\neq 0$，即 $\alpha^{\circledast}\beta^{\circledast}(f')\neq 0$. 这与 $\mathrm{Ker}\alpha^{\circledast}=\mathrm{Im}\beta^{\circledast}$ 矛盾.

(ii) $\mathrm{Ker}\beta\subseteq\mathrm{Im}\alpha$：

反设有 $b\in\mathrm{Ker}\beta\setminus\mathrm{Im}\alpha$，则 $0\neq b+\mathrm{Im}\alpha\in B/\mathrm{Im}\alpha$. 由上段证法知，必有 $g\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(B/\mathrm{Im}\alpha,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$使 $g(b+\mathrm{Im}\alpha)\neq 0$.

令 $\pi:B\to B/\mathrm{Im}\alpha$ 为标准同态，则有

$$f=g\pi:B\to\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

使 $f(b)\neq 0$ 且 $f(\mathrm{Im}\alpha)=0$. 于是 $0=f\alpha=\alpha^{\circledast}f$，即 $f\in\mathrm{Ker}\alpha^{\circledast}=\mathrm{Im}\beta^{\circledast}$. 因此有 $g_1\in C^{\circledast}$ 使 $f=\beta^{\circledast}(g_1)=g_1\beta$. 故 $fb=g_1\beta b$. 但 $fb\neq 0$，$b\in\mathrm{Ker}\beta$. 这是不可能的. □

上面命题 6 之证中的(i)事实上已证得一个重要结果. 为写出这个结果，我们顺便给出对偶于本章§1 习题第 2 题中"生成子"的"上生成子"的概念.

定义 4　若对任意的 $M\in{}_R\mathfrak{M}$ 都有一个公共的 $C\in{}_R\mathfrak{M}$ 使有单同态

$$M\rightarrowtail\prod_{j\in J}C$$

则称 C 为${}_R\mathfrak{M}$ 的**上生成子**(cogenerator).

在命题 6 之证的(i)中将 C 改为$M\in{}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M}$，$\beta\alpha a$ 换为 $m\in M$，则得 $0\neq f_m\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\langle m\rangle,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$，因$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\in\mathrm{Inj}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M}$ 之故可开拓为 $0\neq f'_m\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$，容易看出 $f'_m|_{\langle m\rangle}=f_m$ 为单同态. 由直积 $\prod_{m\in M}\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 的泛性质知有${}_R\mathfrak{M}$ 中同态

$$f:M\to\prod_{m\in M}\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$
$$m_0\mapsto(f_m(m_0))$$

任取 $m_0\neq 0, m_0\in M$,则由于 $f_{m_0}(m_0)\neq 0$ 因此 $f(m_0)\neq 0$. 故 f 为单同态. 于是有

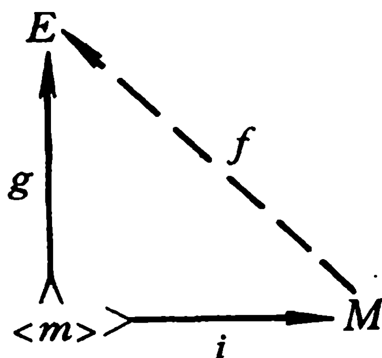
推论 2 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 为${}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M}$(即$\mathbb{A}$G)的内射上生成子.

事实上对任意环 R 总可证明下述结果.

命题 7 ${}_R\mathfrak{M}(\mathfrak{M}_R)$总有内射上生成子.

证 令

$B=\coprod_{\forall I \lhd_l R} R/I$,由上节定理 5 知 B 必为某一内射 R—模 E 的子模. 任取 $M\in {}_R\mathfrak{M}, 0\neq m\in M$,则$\langle m\rangle\simeq R/I$ 对某一个 $I \lhd_l R$ 成立. 于是有下图(g, i 均为${}_R\mathfrak{M}$ 中的单同态)



由 $E\in \mathrm{Inj}_R\mathfrak{M}$ 知,必有使上图为交换图的 R-模同态 f(g 的开拓),因而 $f(m)=g(m)\neq 0$,从而肯定有${}_R\mathfrak{M}$ 中单同态 $M\rightarrowtail \coprod_{m\in M} E$. □

现在来证明 J. Lembek1964 年的一个有重要意义的结果(不难看出对${}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M}$ 的任一内射上生成子 U, $B^{\circledast}$ 改为 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(B,U)$后,该结果仍成立).

定理 6 对任意的环 R, $B\in \mathrm{Flat}\mathfrak{M}_R$ 的充分必要条件是它的示性模$B^{\circledast}\in \mathrm{Inj}_R\mathfrak{M}$.

证 $\Rightarrow$:由$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\in \mathrm{Inj}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M}$, $B\in \mathrm{Flat}\mathfrak{M}_R$ 用命题 5 即得.

$\Leftarrow$:$B^{\circledast}\in \mathrm{Inj}_R\mathfrak{M}$ 时,$\mathrm{Hom}_R(-,B^{\circledast})$是正合反变的. 因此变单同态为满同态、变满同态为单同态. 于是任取(${}_R\mathfrak{M}$ 中的)单同态 $f: A'\rightarrowtail A$必有上行为满同态且竖直箭头为同构的交换图(由伴

随同构定理)

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_R(A,B^{\circledast}) & \twoheadrightarrow & \mathrm{Hom}_R(A',B^{\circledast}) \\ \simeq\Big\downarrow\tau & & \simeq\Big\downarrow\tau \\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(B\underset{R}{\otimes}A,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\varphi} & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(B\underset{R}{\otimes}A',\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \end{array}$$

于是 φ 为满同态，即

$$(B\underset{R}{\otimes}A)^{\circledast}\xrightarrow[\varphi]{}\!\!\!\!\!\rightarrow(B\underset{R}{\otimes}A')^{\circledast}$$

为满同态. 故由命题 6 知有单同态

$$B\underset{R}{\otimes}A \quad \xrightarrow[I_B\otimes f]{} B\otimes A$$

这就证出了 $B\in\mathrm{Flat}\mathfrak{M}_R$. □

当然仿照内射模判定的 Bear 准则的思路，应该考虑：如何用单侧理想来判定 $B\in\mathfrak{M}_R$ 的平坦性? 由于平坦模是通过$\otimes$来定义的. 自然会想到考虑用左理想 I，考察 $B\underset{R}{\otimes}I$ 的有关性质. 事实上我们可得如下的一些结果.

定理 7 对任意环 R，在 $\mathfrak{M}_R$ 中，$B\in\mathrm{Flat}\mathfrak{M}_R$ 的充分必要条件是对环的一切左理想 I 及嵌入同态 $i:I\rightarrowtail R$ 必有单同态 $B\underset{R}{\otimes}I \xrightarrow[I_B\otimes i]{} B\underset{R}{\otimes}R$，即 $I_B\otimes i$ 为单同态.

证 $\Rightarrow$：由平坦模定义即得.

$\Leftarrow$：设 $B\underset{R}{\otimes}I \xrightarrow[I_B\otimes i]{} B\underset{R}{\otimes}R$ 为单同态，$\forall I\underset{l}{\lhd} R$. 由命题 6 知

$$(B\underset{R}{\otimes}R)^{\circledast}\twoheadrightarrow(B\underset{R}{\otimes}I)^{\circledast},\quad \forall I\underset{l}{\lhd}R$$

为满同态. 由伴随同构定理及定理 6 之证知，必有满同态

$$\mathrm{Hom}_R(R,B^{\circledast})\twoheadrightarrow\mathrm{Hom}_R(I,B^{\circledast}),\quad \forall I\underset{l}{\lhd}R$$

因此由 Bear 准则知 $B^{\circledast}\in\mathrm{Inj}_R\mathfrak{M}$. 再由定理 6 即知 $B\in\mathrm{Flat}\mathfrak{M}_R$. □

注意到对任意的 $M\in\mathfrak{M}_R$，

$$M\underset{R}{\otimes}R\simeq M=MR$$

可由定理 7 预见出如下结果.

定理 8 对任意环 R,在 $\mathfrak{M}_R$ 中下述各点等价:

(i) $M\in \mathrm{Flat}\mathfrak{M}_R$;

(ii) $\forall I\underset{l}{\lhd} R, M\underset{R}{\otimes} I\overset{u}{\simeq} MI$,其中 $u(m\otimes i_1)=mi_1, \forall m\in M, i_1\in I$;

(iii) $\forall I\underset{l}{\lhd} R, M\underset{R}{\otimes} I \overset{u}{\rightarrowtail} MI$ 为单同态,其中 u 的定义同(ii)中所示.

证 注意,我们显然有如下的交换图.

$$\begin{array}{ccccc} M\underset{R}{\otimes}I & \xrightarrow{I_M\otimes i} & M\underset{R}{\otimes}R & & \\ & \searrow^{u'(I_M\otimes i)} & \simeq\downarrow u' & m\otimes r & \\ & & & \downarrow & \\ & & M=MR & mr & \end{array}\qquad \begin{array}{l}\forall\ I\underset{l}{\lhd}R, m\in M, r\in R\\ i: I\rightarrowtail R\end{array}$$

由 u'为同构知,$I_M\otimes i$ 为单同态$\Leftrightarrow u'(I_M\otimes i)$为单同态. 而由定理 7 知,$M\in \mathrm{Flat}\mathfrak{M}_R\Leftrightarrow I_M\otimes i$ 为单同态. 再注意 $\mathrm{Im}u'(I_M\otimes i)=MI$,即知(i)、(ii)、(iii)互相等价. □

注意对任意的 $B\in\mathfrak{M}_R$ 必有 $F\in \mathrm{Flat}\mathfrak{M}_R$(比如取 $F\in \mathrm{Free}\mathfrak{M}_R$)使有带嵌入同态 i 的短正合列

$$0\rightarrow K\xrightarrow{i}F\xrightarrow{\beta}B\rightarrow 0 \tag{3}$$

我们可用此来刻画平坦模.

定理 9 设 $F\in \mathrm{Flat}\mathfrak{M}_R$,(3)为 $\mathfrak{M}_R$ 中的正合列,其中 i 为嵌入同态. 则 $B\in \mathrm{Flat}\mathfrak{M}_R$ 的充分必要条件是对 R 的一切左理想 I,都有

$$K\cap FI=KI$$

证　$\Rightarrow$:由$-\underset{R}{\otimes}I_I$ 的右正合性知有正合列

$$K\underset{R}{\otimes}I\xrightarrow{i\otimes I_I}F\underset{R}{\otimes}I\xrightarrow{\beta\otimes I_I}B\underset{R}{\otimes}I\to 0.$$

由 $F\in\mathrm{Flat}\mathfrak{M}_R$,从定理 8 知 $F\underset{R}{\otimes}I\overset{u}{\simeq}FI$. 同理有 $B\underset{R}{\otimes}I\overset{u_1}{\simeq}BI$. 而 $\mathrm{Im}u(i\otimes I_I)=KI$ 蕴含着 $i\otimes I_I(K\underset{R}{\otimes}I)=u^{-1}(KI)$. 于是

$$\mathrm{Ker}(\beta\otimes I_I)=\mathrm{Im}(i\otimes I_I)=u^{-1}(KI)$$

即有实箭头所示的行正合交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & KI & \xrightarrow{u^{-1}} & F\underset{R}{\otimes}I & \xrightarrow{\beta\otimes I_I} & B\underset{R}{\otimes}I & \longrightarrow & 0\\
 & & \alpha_2\Big\uparrow\Big\downarrow\alpha_1 & & \simeq\Big\downarrow u & & \simeq\Big\downarrow u_1 & & \\
0 & \longrightarrow & K\cap FI & \xrightarrow[i|_{K\cap FI}]{} & FI & \xrightarrow[\beta|_{FI}]{} & BI & &
\end{array}$$

由上章§4 命题 1 知,必有唯一的同态 α_1 使上图仍为交换图. 于是

$$\alpha_1=uu^{-1}|_{KI}=I_{KI}$$

同理,将 u,u_1 改为 u^{-1},u_1^{-1},反转竖直箭头可得唯一的 α_2 使 $u^{-1}\alpha_2=u^{-1}$,即 $\alpha_2=I_{K\cap FI}$. 因此 $KI=K\cap FI$.

$\Leftarrow$:此时将上图中 α_1 改为 I_{KI},α_2 改为 $I_{K\cap FI}$(都是恒等同态). 由设 $F\in\mathrm{Flat}\mathfrak{M}_R$ 用定理 8 又知,有同构 $F\underset{R}{\otimes}I\xrightarrow{u}FI$. 于是由上章§4 命题 1°知有唯一的同态 $B\underset{R}{\otimes}I\xrightarrow{u_1}BI$ 与 $BI\xrightarrow{u_2}B\underset{R}{\otimes}I$(对 α_2,u^{-1})使上图为交换图且 $u_1u_2=I_{BI}$, $u_2u_1=I_{B\underset{R}{\otimes}I}$. 因此 $B\underset{R}{\otimes}I\simeq BI$, $\forall I\underset{l}{\lhd}R$. 再由定理 8 即得欲证.　□

现在我们顺便地用定理 9 证明:对 Abel 群(即${}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M}$)来讲,“平坦”与“无挠”(也称无扭)是一回事. 即

$$G\text{ 为平坦}\mathbb{Z}-\text{模}\Leftrightarrow G\text{ 为无挠 Abel 群}.$$

这样可有助于我们理解“平坦”的含意，而且这也使判定$\mathbb{Z}$－模的平坦性变得更容易，即只要看 G 有无有限阶元素就行了（参看例1）．为此，我们来证明更一般的结果．在下面（R 无零因子时）的结果中，B 是无挠 R－模是指：对任意的 $b\in B$ 若有 $0\neq r\in R$ 使 $rb=0$，则 $b=0$，更一般的定义见下章§4．

推论 3 设 $R\in\text{PID}$（交换的主理想整环），$B\in{}_R\mathfrak{M}$，则 B 为平坦 R－模的充分必要条件是 B 为无挠 R－模．

证 取 F 为以 B 的生成系作基的自由 R－模，则有定理 9 中的正合列(3)：

$$0\to K\xrightarrow{i}F\xrightarrow{\beta}B\to 0$$

由 $R\in\text{PID}$ 知，它的理想都是 Ra 之形，其中 $a\in R$．于是从定理 9 知，$B\in\text{Flat}_R\mathfrak{M}\Leftrightarrow K\cap F\cdot Ra=K\cdot Ra$，$\forall a\in R$．后者显然等价于

$$K\cap Ra\cdot F\subseteq Ra\cdot K,\quad \forall a\in R$$

即 $ax\in K$，$x\in F$ 蕴含着 $ax\in aK$，但 R 无零因子，于是这又等价于 $ax\in K$，$x\in F$ 蕴含着 $x\in K$．

另一方面，注意 $B\simeq F/K$，故 $B\in\text{Flat}_R\mathfrak{M}$ 等价于 $ab=0$，$b\in B$，$a\in R$ 时必有 $b=0$，即 B 为无挠 R－模． □

注 3 由推论 3（注意$\mathbb{Z}\in\text{PID}$）立知$\mathbb{Q}\in\text{Flat}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M}$．同时推论 3 之证事实上给出了更一般地关于整环（无零因子交换环）的如下结果．

推论 4 设 R 为整环，$B\in\text{Flat}_R\mathfrak{M}$，则 B 为无挠 R－模．

注 4 我们称一切有限生成左理想都为投射左 R－模的环为**左半遗传环**(left semihereditary ring)．而称半遗传整环为 Prüfer **环**（比如非紧致的 Riemann 曲面上全体复解析函数成 Prüfer 环）．显然 PID 都是 Prüfer 环．可以证明推论 3 对 Prüfer 环也成立．有兴趣的读者可参看[周，88，p. 223]．

如果将定理 9 中的 $F\in\text{Flat}\mathfrak{M}_R$ 改为 $F=\coprod_{j\in J}R\in\text{Free}\mathfrak{M}_R$（这总是可以办到的），于是对任意的 $B\in\mathfrak{M}_R$ 都有 $\mathfrak{M}_R$ 中正合列(3)，其

中 i 仍为嵌入同态，取 $\{x_j \mid j\in J\}$ 为 F 之基，

$$v = x_{j1}r_1 + \cdots + x_{j_t}r_t \in F$$

并记

$$I(v) = Rr_1 + \cdots + Rr_t \lhd_l R$$

当 R 作为右 R－模为单模时（比如 R 为除环时），容易看出：

$$K = \coprod_{l\in L\subseteq J} R$$

于是 $K = KI(K)$. 且正合列(3)此时可裂，从而 B 为 $F\in \mathrm{Free}\mathfrak{M}_R$ 的直和项，即 $B\in \mathrm{P}\mathfrak{M}_R$. 因而 $B\in \mathrm{Flat}\mathfrak{M}_R$. 由此可以预想到用 $K = KI(K)$ 刻画平坦模的可能性. 事实上，我们又有如下结果，这是平坦模的又一个特征性质.

命题 8 设 R 为任意环，$F = \coprod_{j\in J} x_jR \in \mathrm{Free}\mathfrak{M}_R$,

$$0 \to K \xrightarrow{i} F \to B \to 0$$

为 $\mathfrak{M}_R$ 中的正合列，其中 i 为嵌入同态. 则

$$B\in \mathrm{Flat}\mathfrak{M}_R \Leftrightarrow K = KI(K)，即\ \forall v\in K, v\in KI(v).$$

证 $\Rightarrow$：设 $B\in \mathrm{Flat}\mathfrak{M}_R$，则对任意的 $v\in K$,

$$v\in K\cap FI(v) \underset{\text{定理 9}}{=\!=\!=} KI(v)$$

$\Leftarrow$：任取 $I \lhd_l R$，只需证 $K\cap FI = KI$，由定理 9 即知 $B\in \mathrm{Flat}\mathfrak{M}_R$.

事实上由 $KI\subseteq K\cap FI$ 知，只需证 $K\cap FI\subseteq KI$. 为此，任取 $v\in K\cap FI$，则有

$$\left.\begin{array}{l} v\in FI \underset{I(v)\text{定义}}{\Longrightarrow} I(v)\subseteq I \\ v\in K \underset{\text{条件}}{\Longrightarrow} v\in KI(v) \end{array}\right\} \Rightarrow v\in KI，即\ K\cap FI\subseteq KI$$

□

由命题 8 容易得到 Villamayor 的一个未发表但由[C,60]介绍的下述结果.

定理 10 设 $F\in \mathrm{Free}\mathfrak{M}_R$，$R$ 为任意环且

$$0 \to K \xrightarrow{i} F \to B \to 0$$

为 $\mathfrak{M}_R$ 中的正合列，其中 i 为嵌入同态，则下述三点是等价的：

(i) $B \in \mathrm{Flat}\mathfrak{M}_R$；

(ii) $\forall v \in K$，有 v 确定的右 R－模同态 $\theta_v: F \to K$ 使 $\theta_v(v) = v$；

(iii) $\forall v_1, v_2, \cdots, v_n \in K$，有由 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 确定的右 R－模同态 $\theta_{v_1, v_2, \cdots, v_n}: F \to K$ 使 $\theta_{v_1, v_2, \cdots, v_n}(v_i) = v_i, i = 1, 2, \cdots, n$.

证 (i)⇒(ii)：令 $F = \coprod_{j \in J} x_j R \in \mathrm{Free}\mathfrak{M}_R$. 由 $B \in \mathrm{Flat}\mathfrak{M}_R$ 用命题 8 知 $\forall v \in K, v \in KI(u)$. 即 $v = \sum_{<\infty} k_\lambda s_\lambda, k_\lambda \in K, s_\lambda \in I(v)$. 记 $v = x_{j1} r_1 + \cdots + x_{j_t} r_t$，则知 s_λ 可表为

$$s_\lambda = \sum_{<\infty} a_{\lambda_i} r_i, \quad a_{\lambda_i} \in R$$

因此 $v = \sum k'_i r_i$，其中 $k'_i = \sum k_\lambda a_{\lambda_i}$.

定义 $\theta_v: F \to K$ 使

$$\theta_v(x_{j_i}) = \begin{cases} k'_i, & i = 1, 2, \cdots, t \text{ 时} \\ 0, & \text{其他情况}(x_{j_i} \text{为其他基元素}) \end{cases}$$

则 $\theta_v \in \mathrm{Hom}_R(F, K)$ 且使 $\theta_v(v) = v$.

(ii)⇒(iii)：由(ii)知有 $\theta_{v_i} \in \mathrm{Hom}_R(F, K)$ 使

$$\theta_{v_i}(v_i) = v_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

取 v_j 在 F 之基 $\{x_i\}$ 下的表示式. 由上段 θ_v 的构作知，必有 $\theta_{v_1, v_2, \cdots, v_n} \in \mathrm{Hom}_R(F, K)$ 使将上述 v_j 在基 $\{x_i\}$ 的几个表示式($j = 1, 2, \cdots, n$)中用到的基元素变成相应的 k'_i，其余基元素变成 0. 于是有 $\theta_{v_1, v_2, \cdots, v_n} \in \mathrm{Hom}_R(F, K)$ 使 $\theta_{v_1, v_2, \cdots, v_n}(v_i) = v_i, i = 1, 2, \cdots, n$.

(iii)⇒(i)：令 $v = x_{j_1} r_1 + x_{j_2} r_2 + \cdots + x_{j_t} r_t \in K$，$\{x_j\}$ 为 F 的基. 由(iii)知有 $\theta_v \in \mathrm{Hom}_R(F, K)$ 使 $\theta_v(v) = v$. 于是

$$v=\theta_v(v)=\theta_v(x_{j_1})r_1+\theta_v(x_{j_2})r_2+\cdots+\theta_v(x_{j_t})r_t\in KI(v)$$

即 $v\in KI(v)$. 由命题 8 即知 $B\in \mathrm{Flat}\mathfrak{M}_R$. □

由定理 10 可看出:若 K 为有限生成的(记为 $K\in \mathrm{f.g.}\mathfrak{M}_R$). 取 $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 为 K 的生成系,则知 $0\to K\to F\to B\to 0$ 是可裂的,因此 $F\simeq K\oplus B$. 当 $F\in \mathrm{f.g.Free}\mathfrak{M}_R$ 或 $B\in \mathrm{f.g.}\mathfrak{M}_R$ 时,$B\in \mathrm{f.g.P}\mathfrak{M}_R\subseteq \mathrm{f.g.\ Flat}\ \mathfrak{M}_R$.

为便于将此写成一个结果.引进如下定义.

定义 5 设 $B\in\mathfrak{M}_R$ 且有 $F_1,F_2\in \mathrm{f.g.\ Free}\mathfrak{M}_R$ 使

$$F_1\to F_0\to B\to 0$$

为 $\mathfrak{M}_R$ 中的正合列,则称 B 为**有限表示(现)的**(finitely presented),记为 $B\in \mathrm{f.p.}\mathfrak{M}_R$,或称 B 为**有限相关的**(finitely related)记为 $B\in \mathrm{f.r.}\mathfrak{M}_R$.

类似地可定义左 R - 模的有限表示性.

显然 $\mathrm{f.p.}\mathfrak{M}_R\subseteq \mathrm{f.g.}\mathfrak{M}_R$. 我们下面来证

命题 9 对任意环 R,

$$\mathrm{f.p.\ Flat}\ \mathfrak{M}_R=\mathrm{f.p.\ P}\mathfrak{M}_R=\mathrm{f.g.P}\mathfrak{M}_R$$

因此,有限表示的平坦模必为投射模.即,对有限表示模类,平坦与投射是等价概念.

证 显然有 $\mathrm{f.p.\ Flat}\ \mathfrak{M}_R\supseteq \mathrm{f.p.\ P}\mathfrak{M}_R\subseteq \mathrm{f.g.P}\mathfrak{M}_R$,因此只需证下述两点.

(i) $\mathrm{f.p.\ Flat}\ \mathfrak{M}_R\subseteq \mathrm{P}\mathfrak{M}_R$.

设 $B\in \mathrm{f.p.\ Flat}\mathfrak{M}_R$,则有正合列

$$F_1\xrightarrow{\alpha}F_0\xrightarrow{\beta}B\to 0$$

其中 $F_1,F_0\in \mathrm{f.g.\ Free}\ \mathfrak{M}_R$. 取 $K=\mathrm{Ker}\beta$ 则 $K=\mathrm{Im}\alpha$. 因此

$$0\to K\to F_0\xrightarrow{\beta}B\to 0$$

正合.又由 $F_1\in \mathrm{f.g.}\mathfrak{M}_R$ 知 $K=\mathrm{Im}\alpha\in \mathrm{f.g.}\mathfrak{M}_R$,于是由定义 5 前

的分析即知 $B\in \mathrm{P}\mathfrak{M}_R$.

(ii) $\mathrm{f.g.}\ \mathrm{P}\mathfrak{M}_R\subseteq \mathrm{f.p.}\ \mathfrak{M}_R$.

设 $P\in \mathrm{f.g.}\ \mathrm{P}\mathfrak{M}_R$，则有 $Q\in \mathrm{f.g.}\,\mathfrak{M}_R$ 使 $F=P\oplus Q\in \mathrm{f.g.}$ $\mathrm{Free}\mathfrak{M}_R$. 于是有正合列

$$0\to Q\to F\to P\to 0$$

此时必有 $F_1\in \mathrm{f.g.}\ \mathrm{Free}\ \mathfrak{M}_R$ 使有满同态 $F_1\twoheadrightarrow Q$. 于是

$$F_1\to F\to P\to 0$$

正合. 即 $P\in \mathrm{f.p.}\ \mathfrak{M}_R$. □

由上证已顺便得到如下推论.

推论 5 对任意环 R，$M\in \mathrm{f.p.}\ \mathfrak{M}_R\Leftrightarrow$有 $F_0\in \mathrm{f.g.}\ \mathrm{Free}\ \mathfrak{M}_R$ 与 $K\in \mathrm{f.g.}\ \mathfrak{M}_R$ 使

$$0\to K\to F_0\to M\to 0$$

正合.

下面的例子说明 $\mathrm{f.g.}\nRightarrow \mathrm{f.p.}$.

例 7 设 $R=K_1[x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots]$，$K_1$ 为域. $I=\langle x_1,x_2,\cdots,x_n\cdots\rangle$ 为 R 的由 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$ 生成的理想. 显然 $R/I\in$ f.g.. 我们来证 $R/I\notin$ f.p.

事实上，若 $R/I\in$ f.p.，则有正合列(其中 $F_0\in \mathrm{f.g.}\ \mathrm{Free}\ \mathfrak{M}_R$，$K\in \mathrm{f.g.}\ \mathfrak{M}_R$)

$$0\to K\to F_0\to R/I\to 0$$

由上章§4 命题 1 可得行正合的交换图(p_1 由 F_0 的投射性得到，α 由 p_1，$I_{R/I}$ 得到)

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & F_0 & \longrightarrow & R/I & \longrightarrow & 0\\
\downarrow{\scriptstyle 0} & & \downarrow{\scriptstyle 0} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle p_1} & & \|{\scriptstyle I_{R/I}} & & \\
0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & R & \longrightarrow & R/I & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

由五引理知 α 满. 因此由 $K\in$ f.g. 知 $I\in$ f.g.. 这显然是不可能的, 故 $R/I\notin$ f.p..

作为本节的结束, 我们来给出 Noether 环的一个特征性质. 它是[Ro, 79]中推论 4.2 的改进.

定理 11 环 R 为左(右)Noether 环的充分必要条件是一切有限生成左(右) R-模都是有限表示的. 即 $\text{f.g.}_R\mathfrak{M}=\text{f.p.}_R\mathfrak{M}$ ($\text{f.g.}\mathfrak{M}_R=\text{f.p.}\mathfrak{M}_R$).

证 $\Rightarrow$: 设 R 为左 Noether 环, $M\in\text{f.g.}_R\mathfrak{M}$, 来证 $M\in\text{f.p.}_R\mathfrak{M}$. 事实上, 由 $M\in\text{f.g.}_R\mathfrak{M}$ 知必有 $F\in\text{f.g.Free}_R\mathfrak{M}$ 使成正合列

$$0\to\text{Ker}f\to F\xrightarrow{f}M\to 0$$

由 R 为左 Noether 环, $F\in\text{f.g.}_R\mathfrak{M}$ 知 F 的左 R-子模 $\text{Ker}f\in\text{f.g.}_R\mathfrak{M}$. 因此, 由推论 5(当然可用于 $_R\mathfrak{M}$)即知 $M\in\text{f.p.}_R\mathfrak{M}$.

$\Leftarrow$: 设 $\text{f.g.}_R\mathfrak{M}=\text{f.p.}_R\mathfrak{M}$, 来证 R 的一切左理想都是有限生成的, 即知 R 为左 Noether 环. 为此取 R 的任一个左理想 I, 则有左 R-模正合列

$$0\to I\to R\to R/I\to 0$$

但 $R/I\in\text{f.g.}_R\mathfrak{M}=\text{f.p.}_R\mathfrak{M}$. 因此又有左 R-模正合列

$$0\to K\to F\to R/I\to 0$$

其中 $F\in\text{f.g.Free}_R\mathfrak{M}\subset\text{f.g.P}_R\mathfrak{M}$, $K\in\text{f.g.}_R\mathfrak{M}$, 由本章 §1 的 Schanuel 引理知, 必有左 R-模同构

$$I\oplus F\simeq K\oplus R$$

于是由 $K\oplus R\in\text{f.g.}_R\mathfrak{M}$ 即知($K\oplus R$ 到 I 有满同态) $I\in\text{f.g.}_R\mathfrak{M}$.

□

习 题 2.3

1. 设 R 为任意环, $F=\coprod_{j\in J}F_j\in\text{Flat}_R\mathfrak{M}$. 证明 $F_j\in\text{Flat}_R\mathfrak{M}$, $\forall j\in J$. (注意: 反过来不成立).

2. 设 $0 \to A \to B \to C \to 0$ 在 $\mathfrak{M}_R$ 中正合，$A, C \in \mathrm{Flat}\mathfrak{M}_R$. 证明：$B \in \mathrm{Flat}\mathfrak{M}_R$.

(建议：用定理 8 与三引理).

3. 证明在 $\mathfrak{M}_R$ 中，下述三点等价：

(i) $B \in \mathrm{f.p.}\ \mathfrak{M}_R$;

(ii) 有 $P_0, P_1 \in \mathrm{f.g.P}\mathfrak{M}_R$ 使 $P_1 \to P_0 \to B \to 0$ 正合.

(iii) 有 $P_0 \in \mathrm{f.g.P}\mathfrak{M}_R$, $K \in \mathrm{f.g.}\mathfrak{M}_R$ 使 $0 \to K \to P_0 \to B \to 0$ 正合.

4. 证明例 4 中的环 $R = K_1[x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots]$ (K_1 为域) 不是 Noether 环.

5. 证明：设 $B \in \mathfrak{M}_R$. 则 $B \in \mathrm{Flat}\mathfrak{M}_R \Leftrightarrow$ 对任意的关系式

$$\sum_{j=1}^{n} b_j a_j = 0, b_j \in B, a_j \in R$$

都必有 $u_1, u_2, \cdots, u_m \in B$ 以及 $c_{ij} \in R$, $i = 1, 2, \cdots, m$, $j = 1, 2, \cdots, n$, 使

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} a_j = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

且

$$\sum_{i=1}^{m} u_i c_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

第三章　环模复形的同调理论

在本章中我们将介绍环模复形的同调函子、导出函子与长正合列定理,特别是 Hom 的导出函子 Ext 以及⊗的导出函子 Tor. 上一章的大部分内容都在本章中得到深化与发展.上章遗留下来的一些重要问题也将在本章中得到解决.特别是,我们将用本章的理论证明同调维数中的两个关键性的结果.即,对任意环由左(右)模的投射分解与内射分解定义的两种整体维数是相等的;由左模、右模的平坦分解定义的左右弱维数也是相等的.而且我们将证明环的整体维数与弱维数的计算都归结为循环模相应维数的计算. 在本章的学习中我们希望读者能熟悉长正合列的作用.事实上这是同调代数中三大方法之一.在拓扑学与几何学中也有重要应用. 容易看出,本章的主要结果也可应用于更广的范畴.

§1　复形的同调函子与连接同态

先将拓扑学中(链)复形的概念移植到任意环 R 上的模范畴(比如${}_R\mathfrak{M}$).

定义 1　在${}_R\mathfrak{M}$ 中,若同态列

$$\mathbb{A}\equiv\cdots\longrightarrow A_{n+1}\xrightarrow{d_{n+1}}A_n\xrightarrow{d_n}A_{n-1}\longrightarrow\cdots,\quad n\in\mathbb{Z}$$

满足 $d_nd_{n+1}=0,\ \forall\, n\in\mathbb{Z}$,则称$\mathbb{A}$ 为一个(${}_R\mathfrak{M}$)**复形**(complex)或**链复形**(chain complex),记为$\mathbb{A}$ 或($\mathbb{A}$, d). d_n 称为$\mathbb{A}$ 的**微分**(differentiation)或**边缘算子**(boundary operator).

由定义 1 知,复形不但是正合列的推广(这里的条件 d_nd_{n+1}

$=0$ 等价于 $\mathrm{Im}d_{n+1}\subseteq \mathrm{Ker}\ d_n$），而且也可看作是模的推广．因为对任意的 $M\in {}_R\mathfrak{M}$ 可看成是复形

$$\cdots\rightarrow 0\longrightarrow 0\rightarrow\cdots\rightarrow 0\longrightarrow M\xrightarrow{I_M}M\longrightarrow 0\longrightarrow\cdots$$

定义 2 设$(\mathbb{A},d)$为$({}_R\mathfrak{M})$复形，称

$$H_n(\mathbb{A})=\mathrm{Ker}d_n/\mathrm{Im}d_{n+1}$$

为$(\mathbb{A},d)$的**第 n 个同调模**（n^{th} homology module），有时也称为 n 维同调模．

$\mathrm{Ker}\ d_n$ 的元素称为此复形的 n－**圈（闭链，循环）**（n－cycle），$\mathrm{Im}d_{n+1}$的元素称为此复形的 n－**边缘**（n－boundary），常记

$$Z_n=Z_n(\mathbb{A})=\mathrm{Ker}d_n$$

$$B_n=B_n(\mathbb{A})=\mathrm{Im}d_{n+1}$$

$$H_n(\mathbb{A})=Z_n(\mathbb{A})/B_n(\mathbb{A})$$

$H_n(\mathbb{A})$中的元素常被记为$[a]=a+B_n(\mathbb{A})$，称为 a 的**同调类**，$\forall a\in Z_n(\mathbb{A})$．

下面来定义复形之间的态射（链映射）．

定义 3 设$(\mathbb{A},d)$、$(\mathbb{A}',d')$为$({}_R\mathfrak{M})$复形，$f_n:A_n\rightarrow A'_n$，$\forall n\in\mathbb{Z}$，为使下图成交换图的（左 R－模）同态．

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & A_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & A_n & \xrightarrow{d_n} & A_{n-1} & \longrightarrow & \cdots\\
 & & \downarrow{\scriptstyle f_{n+1}} & & \downarrow{\scriptstyle f_n} & & \downarrow{\scriptstyle f_{n-1}} & & \\
\cdots & \longrightarrow & A'_{n+1} & \xrightarrow{d'_{n+1}} & A'_n & \xrightarrow{d'_n} & A'_{n-1} & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

则称 $f=\{f_n\}$为复形$(\mathbb{A},d)$到复形$(\mathbb{A}',d')$的**链映射**（chain map），记为 $f:\mathbb{A}\rightarrow\mathbb{A}'$或$\mathbb{A}\xrightarrow{f}\mathbb{A}'$．也称 f 为**复形映（态）射**．

用${}_R\mathfrak{M}$ 中同态的合成定义链映射的合成，则得到一个范畴，它以复形为对象，以链映射为态射，称为${}_R\mathfrak{M}$ 上的**复形范畴**．记为

$\mathbb{C}\mathrm{omp}$ 或$\mathbb{C}\mathrm{omp}({}_R\mathfrak{M})$.

由定义 2 立知:

复形$\mathbb{A}$为正合列$\Leftrightarrow H_n(\mathbb{A})=0, \forall n\in\mathbb{Z}$.

这种复形称为**零调复形**(acyclic complex)有的文献上(如[Co,79])的零调复形定义中不要求 $H_0(\mathbb{A})=0$. 在下节讲到删项复形时会看出这两种定义的作用实质上是一样的.

由定义 3 知:

链映射 $f=\{f_n\}$为复形同构(复形范畴中的同构(等价)态射)$\Leftrightarrow f_n$ 为同构, $\forall n\in\mathbb{Z}$.

例 1 $\forall M\in{}_R\mathfrak{M}$, M 的投射分解

$$\mathbb{P}_M=\cdots\longrightarrow P_1\longrightarrow P_0\longrightarrow M\longrightarrow 0 \quad (\text{右边可无限地补“0”})$$

为零调复形, M 的内射分解

$$\mathbb{E}_M=0\longrightarrow M\longrightarrow E^0\longrightarrow E^1\longrightarrow\cdots(\text{左边可无限地补“0”})$$

也是零调复形.

$\mathbb{P}_M$中顺箭头方向,下足码递减,$\mathbb{E}_M$中顺箭头方向上肩码递增. 为统一起见,常将$\mathbb{E}_M$改写成

$$\mathbb{E}_M=0\longrightarrow M\longrightarrow E_0\longrightarrow E_{-1}\longrightarrow E_{-2}\longrightarrow\cdots$$

注意加法共变或反变函子都保持零对象及零态射,因此有如下结果.

命题 1 设$(\mathbb{A},d)$为$({}_R\mathfrak{M})$复形, $F:{}_R\mathfrak{M}\longrightarrow{}_S\mathfrak{M}$ 为加法共变(或反变)函子,则

$$F(\mathbb{A})=\cdots\longrightarrow F(A_{n+1})\xrightarrow{Fd_{n+1}}F(A_n)\xrightarrow{Fd_n}F(A_{n-1})\longrightarrow\cdots(F\text{ 共变时})$$

$$(F(\mathbb{A})=\cdots\longrightarrow F(A_{n-1})\xrightarrow{Fd_n}F(A_n)\xrightarrow{Fd_{n+1}}F(A_{n+1})\longrightarrow\cdots.$$

$$\equiv\cdots\longrightarrow B^{-n+1}\xrightarrow{Fd_n}B^{-n}\xrightarrow{Fd_{n+1}}B^{-n-1}\longrightarrow\cdots(F\text{ 反变时}))$$

$$B^{-n}\equiv F(A_n)$$

必是${}_S\mathfrak{M}$ 复形. 因此 $F:\mathbb{C}\mathrm{omp}({}_R\mathfrak{M})\longrightarrow\mathbb{C}\mathrm{omp}({}_S\mathfrak{M})$仍为加法共变

(反变)函子($\mathbb{C}$omp$({}_R\mathfrak{M})$中的零对象即$\cdots\longrightarrow 0\longrightarrow 0\longrightarrow 0\longrightarrow\cdots$,零态射即 $0=\{0\}$).

证 F 共变时,由

$$Fd_jFd_{j+1}=F(d_jd_{j+1})=F(0)=0$$

即知. F 反变时由

$$Fd_{j+1}Fd_j=F(d_jd_{j+1})=F(0)=0$$

即知. □

容易想象,复形间的链映射必带来它们的同调模的联系.为此对${}_R\mathfrak{M}$ 复形给出如下定义.

定义 4 设 $f:\mathbb{A}\longrightarrow\mathbb{A}'$为链映射,定义

$$f_*\equiv H_n(f):H_n(\mathbb{A})\longrightarrow H_n(\mathbb{A}'_n)$$
$$Z_n+B_n(\mathbb{A})\longmapsto f_n(Z_n)+B_n(\mathbb{A}')$$

则(下面可证)f_* 为${}_R\mathfrak{M}$ 中的同态,称为由 f 诱导的同态(映射).

下面来证 $H_n:\mathbb{C}\text{omp}({}_R\mathfrak{M})\longrightarrow{}_R\mathfrak{M}$ 为加法共变函子.即

定理 1 对任意的 $n\in\mathbb{Z}$,

$$H_n:\mathbb{C}\text{omp}({}_R\mathfrak{M})\longrightarrow{}_R\mathfrak{M}$$

为加法共变函子.记 $H=\{H_n\}$,称为**同调函子**(homology functor).

证 只需证 f_* 为完全确定的,其余都是显见的.

事实上,由 $f:(\mathbb{A},d)\longrightarrow(\mathbb{A}',d')$为链映射知有交换图

$$\begin{array}{ccccc}
A_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & A_n & \xrightarrow{d_n} & A_{n-1} \\
\Big\downarrow f_{n+1} & & \Big\downarrow f_n & & \Big\downarrow f_{n-1} \\
A'_{n+1} & \xrightarrow{d'_{n+1}} & A'_n & \xrightarrow{d'_n} & A'_{n-1}
\end{array}\qquad \forall\, n\in\mathbb{Z}$$

为证 f_* 的完全确定性,只要证 $f_n(Z_n(\mathbb{A}))\subseteq Z_n(\mathbb{A}')$,$f_n\ (B_n(\mathbb{A}))\subseteq$

$B_n(\mathbb{A}')$.这是不难验证的:

$$\forall z_n \in \mathrm{Ker} d_n = Z_n(\mathbb{A}) \Rightarrow d_n z_n = 0 \Rightarrow d'_n f_n z_n \underset{(交换图)}{=\!=\!=} f_{n-1} d_n z_n$$
$$= 0 \Rightarrow f_n z_n \in \mathrm{Ker} d'_n = Z_n(\mathbb{A}').$$

$$\forall b_n \in \mathrm{Im} d_{n+1} = B_n(\mathbb{A}) \Rightarrow \exists\, a_{n+1} \in A_{n+1} 使\ b_n = d_{n+1} a_{n+1}$$
$$\Rightarrow f_n b_n = f_n d_{n+1} a_{n+1} \underset{(交换图)}{=\!=\!=} d'_{n+1} f_{n+1} a_{n+1} \in B_n(\mathbb{A}').$$

这就证出了 f_* 的完全确定性. □

注意正合函子一定是加法函子(见第一章§7)可得如下结果.

命题 2 (i)设 $T: {}_R\mathfrak{M} \longrightarrow {}_S\mathfrak{M}$ 为正合共变函子,则

$$H_n(T\mathbb{A}) \simeq TH_n(\mathbb{A}),即\ H_nT = TH_n;$$

(ii)设 $G: {}_R\mathfrak{M} \longrightarrow {}_S\mathfrak{M}$ 为正合反变函子,则

$$H_{-n}(G\mathbb{A}) \simeq GH_n(\mathbb{A}),即\ H_{-n}G = GH_n,$$

其中 $(GA)^{-(n-1)} \xrightarrow{(Gd)^{-(n-1)}} (GA)^{-n}$ 表示 $GA_{n-1} \xrightarrow{Gd_n} GA_n$.

证 只需对 T 证明,对 G 的证明是对偶的.

由

$$\mathbb{A} = \cdots \to A_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} A_n \xrightarrow{d_n} A_{n-1} \to \cdots$$

知,有正合列

$$0 \to \mathrm{Im} d_{n+1} \rightarrowtail \mathrm{Ker} d_n \twoheadrightarrow H_n(\mathbb{A}) \longrightarrow 0$$

因为 T 为正合共变的,又有

$$0 \longrightarrow T(\mathrm{Im} d_{n+1}) \rightarrowtail T(\mathrm{Ker}\, d_n) \twoheadrightarrow T(H_n(\mathbb{A})) \longrightarrow 0$$

因此由正合函子 T 保核、保象知

$$TH_n(\mathbb{A}) \simeq T(\mathrm{Ker}\, d_n)/T(\mathrm{Im}\, d_{n+1}) \simeq \mathrm{Ker}\, Td_n/\mathrm{Im}\, Td_{n+1}$$
$$\simeq H_n(T\mathbb{A})$$ □

注意 $\coprod$ 显然为正合函子,因此有如下推论.

推论 1 $H_n(\coprod_{j\in J} \mathbb{A}_k) \simeq \coprod_{j\in J} H_n(\mathbb{A}_k)$,

其中左端 $\coprod_{j\in J} \mathbb{A}_k$ 表 $\mathrm{Comp}({}_R\mathfrak{M})$ 中的直和,也可按模的直和定义法直接定义.

下面给出子复形与商复形等概念.

定义 5 设$(\mathbb{A},d)$为复形,$(\mathbb{A}',d')$满足$A'_n<A_n$(即A'_n为A_n的子R-模)且$d'_n=d_n|_{A'_n}$,则称$(\mathbb{A}',d')$为$(\mathbb{A},d)$的**子复形**(subcomplex),记为$(\mathbb{A}',d')<(\mathbb{A},d)$或$\mathbb{A}'<\mathbb{A}$.此时称

$$\mathbb{A}/\mathbb{A}'=\cdots\longrightarrow A_n/A'_n\xrightarrow{\overline{d_n}}A_{n-1}/A'_{n-1}\longrightarrow\cdots$$

为$\mathbb{A}$对于$\mathbb{A}'$的**商复形**(quotient complex),其中

$\overline{d_n}:a_n+A'_n\longmapsto d_na_n+A'_{n-1}$,即$\overline{a_n}\longmapsto\overline{d_na_n}$,$\forall a_n\in A_n$.

定义 6 设$f:(\mathbb{A},d)\longrightarrow(\mathbb{B},\partial)$为复形的链映射,记

$$\mathbb{K}\mathrm{er}f=\cdots\longrightarrow\mathrm{Ker}f_n\xrightarrow{d_n}\mathrm{Ker}f_{n-1}\longrightarrow\cdots,\left(d_n=d_n\Big|_{\mathrm{Ker}f_n}\right)$$

$$\mathbb{I}\mathrm{m}f=\cdots\longrightarrow\mathrm{Im}f_n\xrightarrow{\partial_n}\mathrm{Im}f_{n-1}\longrightarrow\cdots,\left(\partial_n=\partial_n\Big|_{\mathrm{Im}f_n}\right)$$

$$\mathbb{C}\mathrm{oker}f=\cdots\longrightarrow\mathrm{Coker}f_n\xrightarrow{\overline{\partial_n}}\mathrm{Coker}f_{n-1}\longrightarrow\cdots,(\overline{\partial_n}\text{由}\partial_n\text{诱导})$$

分别称为链映射f的**核**、**象**与**上核**.

显然有

推论 2 在定义 6 的记号下,

$$\mathbb{A}/\mathbb{K}\mathrm{er}f\simeq\mathbb{I}\mathrm{m}f$$
$$\mathbb{C}\mathrm{oker}f\simeq\mathbb{B}/\mathbb{I}\mathrm{m}f$$

定义 7 若有复形链映射列

$$\cdots\longrightarrow\mathbb{A}\xrightarrow{f}\mathbb{B}\xrightarrow{g}\mathbb{C}\longrightarrow\cdots$$

使

$$\mathbb{I}\mathrm{m}f=\mathbb{K}\mathrm{er}g$$

则称此列在$\mathbb{B}$处正合.处处正合的列称为**复形正合列**(有左(右)端时,左(右)端处不计).形如

$$0\longrightarrow\mathbb{A}\xrightarrow{f}\mathbb{B}\xrightarrow{g}\mathbb{C}\longrightarrow0$$

(0 表零复形,即$\cdots\longrightarrow0\longrightarrow0\longrightarrow0\longrightarrow\cdots$)的复形正合列称为**复形短正合列**.

类似于$_R\mathfrak{M}$中那样，可定义复形的可裂正合列，并证明左可裂等价于右可裂，也等价于$\mathbb{B}\simeq\mathbb{A}\oplus\mathbb{C}$.

在下节中我们将看到：对上述短正合列用同调函子作用后，一般地既不是左正合的，也不是右正合的，而只能得到"半"正合列$H_n(\mathbb{A})\to H_n(\mathbb{B})\to H_n(\mathbb{C})$（即只在$H_n(\mathbb{B})$处正合）.

对偶于复形及其同调模，有上复形与上同调模的概念. 现简述如下.

在$_R\mathfrak{M}$中若

$$\mathbb{C}=(\mathbb{C},\delta)=\cdots\longrightarrow C^{n-1}\xrightarrow{\delta^{n-1}}C^n\xrightarrow{\delta^n}C^{n+1}\longrightarrow\cdots$$

（肩码随箭头走向递增）满足$\delta^n\delta^{n-1}=0,\ \forall\, n$，则称$\mathbb{C}$为（$_R\mathfrak{M}$）**上复形**（cocomplex）.

$$H^n(\mathbb{C})=\mathrm{Ker}\delta^n/\mathrm{Im}\delta^{n-1}$$

称为上复形$\mathbb{C}$的**第 n 个上同调模**（cohomology module）.

$$Z^n=Z^n(\mathbb{C})=\mathrm{Ker}\delta^n$$

的元素称为$\mathbb{C}$的 n - **上圈（上闭链，上循环）**（n - cocycle）.

$$B^n=B^n(\mathbb{C})=\mathrm{Im}\delta^{n-1}$$

的元素称为$\mathbb{C}$的 n - **上边缘**（n - coboundary）.

仿前可对偶地定义子上复形、商上复形等概念. 链映射 f 诱导的映射（同态）$H^n(f)$记为 f^*.

复形与上复形的概念与相关结果都是对偶的. 我们今后主要讨论复形. 不加声明时均指$_R\mathfrak{M}$上的复形，虽然许多结果可推广到更广的范畴.

下面介绍在复形同调理论中起着关键作用的两个结果——连接同态定理与长正合列定理.

定理 2（连接同态定理） 设

$$0\longrightarrow\mathbb{A}\xrightarrow{i}\mathbb{B}\xrightarrow{p}\mathbb{C}\longrightarrow 0$$

为$_R\mathfrak{M}$上复形的短正合列，则对一切 n 都有$_R\mathfrak{M}$中的同态（称为**连接同态**（connecting homomorphism））

$$\partial_n: H_n(\mathbb{C}) \longrightarrow H_{n-1}(\mathbb{A})$$

使

$$\partial_n: c + B_n(\mathbb{C}) \longmapsto i_{n-1}^{(-1)} d_{B,n} p_n^{(-1)}(c) + B_{n-1}(\mathbb{A})$$

其中 $d_{B,n}$ 表$\mathbb{B}$的第 n 个边缘算子 $d_{B,n}: B_n \to B_{n-1}$，$x^{(-1)}$ 表示沿同态 x 箭头相反方向的图追踪.

证 由设知，有如下实箭头所示的行正合交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & B_{n+1} & \xrightarrow{p_{n+1}} & C_{n+1} \\
 & & & & \downarrow d_{B,n+1} & ③ & \downarrow d_{C,n+1} \\
0 & \longrightarrow & A_n & \xrightarrow{i_n} & B_n & \xrightarrow{p_n} & C_n \\
 & & & & b_n & \longleftarrow & c \\
 & & \downarrow d_{A,n} & ② & \downarrow d_{B,n} & ① & \downarrow d_{C,n} \\
 & & a_{n-1} & \longleftarrow & & & \\
0 & \longrightarrow & A_{n-1} & \xrightarrow{i_{n-1}} & B_{n-1} & \xrightarrow{p_{n-1}} & C_{n-1} \\
 & & \downarrow d_{A,n-1} & ④ & \downarrow d_{B,n-1} & & \\
 & & A_{n-2} & \xrightarrow{i_{n-2}} & B_{n-2} & &
\end{array}$$

现在沿虚箭头所示由 C_n 出发进行图追踪如下：

任取 $H_n(\mathbb{C})$中元素，必可表为 $c + B_n(\mathbb{C})$，其中 $c \in \operatorname{Ker} d_{C,n}$，$B_n(\mathbb{C}) = \operatorname{Im} d_{C,n+1}$.

由 $c \in \operatorname{Ker} d_{C,n} \subset C_n \underset{p_n\text{满}}{\Longrightarrow} \exists\, b_n \in B_n$ 使 $p_n(b_n) = c \Rightarrow p_{n-1} \cdot d_{B,n}(b_n) \underset{①\text{可换}}{=\!=\!=} d_{C,n}(c) = 0 \Rightarrow d_{B,n}(b_n) \in \operatorname{Ker} p_{n-1} \underset{B_{n-1}\text{处正合}}{=\!=\!=\!=\!=} \operatorname{Im} i_{n-1} \underset{i_{n-1}\text{单}}{\Longrightarrow} \exists\,|\; a_{n-1} \in A_{n-1}$ 使 $i_{n-1}(a_{n-1}) = d_{B,n}(b_n)$.

下面尚需验证如下两点(验证这两点后，可知$\partial_n: c + B_n(\mathbb{C}) \longmapsto a_{n-1} + B_{n-1}(\mathbb{A})$为${}_R\mathfrak{M}$ 中的同态).

(i) 上述的 $a_{n-1} \in \operatorname{Ker} d_{A,n-1}$，因而$[a_{n-1}] \in H_{n-1}(\mathbb{A})$.

$i_{n-2}d_{A,n-1}(a_{n-1}) \xlongequal[\text{④可换}]{} d_{B,n-1}i_{n-1}(a_{n-1}) \xlongequal[\text{由上}]{} d_{B,n-1}d_{B,n}(b_n)$
$\xlongequal[\text{B为复形}]{} 0 \xRightarrow[i_{n-2}\text{单}]{} d_{A,n-1}(a_{n-1})=0$，即 $a_{n-1}\in \mathrm{Ker}d_{A,n-1}$.

(ii) $c \longmapsto a_{n-1}$是完全确定的(与 b_n 选取无关). 为此只需证当$[c]=0$(即 $c\in \mathrm{Im}d_{C,n+1}=B_n(\mathbb{C})$)时$[a_{n-1}]=0$(即 $a_{n-1}\in \mathrm{Im}d_{A,n}$). 事实上，

$[c]=0$ 即 $c\in \mathrm{Im}d_{C,n+1}\Rightarrow \exists c_{n+1}\in C_{n+1}$使 $d_{C,n+1}(c_{n+1})=c$
$\xRightarrow[p_{n+1}\text{满}]{} \exists b_{n+1}\in B_{n+1}$使 $p_{n+1}(b_{n+1})=c_{n+1} \xRightarrow[\text{③可换}]{} d_{B,n+1}(b_{n+1})-b_n\in$
$\mathrm{Ker}p_n \xlongequal[B_n\text{处正合}]{} \mathrm{Im}i_n \xRightarrow[i_n\text{单}]{} \exists\,|\,a_n\in A_n$ 使$i_n(a_n)=d_{B,n+1}(b_{n+1})-$
$b_n \xRightarrow[\text{②可换}]{} i_{n-1}d_{A,n}(a_n)=d_{B,n}i_n(a_n)=d_{B,n}(d_{B,n+1}(b_{n+1})-b_n)$
$\xlongequal[\text{B为复形}]{} 0-d_{B,n}(b_n) \xlongequal[\text{由上}]{} -i_{n-1}(a_{n-1}) \xRightarrow[i_{n-1}\text{单}]{} a_{n-1}=d_{A,n}(-a_n)\in$
$\mathrm{Im}d_{A,n}$.　□

定理 3　((复形同调的)长正合列(long exact sequence)定理).
设

$$0\longrightarrow \mathbb{A}\xrightarrow{i}\mathbb{B}\xrightarrow{p}\mathbb{C}\longrightarrow 0$$

为$_R\mathfrak{M}$ 上复形的短正合列，则

(i) 有$_R\mathfrak{M}$ 中正合列(其中∂为连接同态)

$$\cdots\longrightarrow H_n(\mathbb{A})\xrightarrow{i_*}H_n(\mathbb{B})\xrightarrow{p_*}H_n(\mathbb{C})\xrightarrow{\partial}H_{n-1}(\mathbb{A})\xrightarrow{i_*}$$
$$H_{n-1}(\mathbb{B})\xrightarrow{p_*}H_{n-1}(\mathbb{C})\xrightarrow{\partial}H_{n-2}(\mathbb{A})\longrightarrow\cdots,$$

即有足码螺旋式下降的正合三角形(exact triangle)(足码省写)

$$\begin{array}{ccc} H(\mathbb{A}) & \xrightarrow{i_*} & H(\mathbb{B}) \\ & {\scriptstyle\partial}\nwarrow \quad \swarrow{\scriptstyle p_*} & \\ & H(\mathbb{C}) & \end{array}$$

(ii) 连接同态∂是自然的. 因此,若有带正合行的复形交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{A} & \xrightarrow{i} & \mathbb{B} & \xrightarrow{p} & \mathbb{C} & \longrightarrow & 0 \\ & & \Big\downarrow f & \text{①} & \Big\downarrow g & \text{②} & \Big\downarrow h & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{A}' & \xrightarrow[i']{} & \mathbb{B}' & \xrightarrow[p']{} & \mathbb{C}' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

则有带正合行的${}_R\mathfrak{M}$中交换图

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_n(\mathbb{A}) & \xrightarrow{i_*} & H_n(\mathbb{B}) & \xrightarrow{p_*} & H_n(\mathbb{C}) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(\mathbb{A}) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \Big\downarrow f_* & \text{①}' & \Big\downarrow g_* & \text{②}' & \Big\downarrow h_* & \text{③}' & \Big\downarrow f_* & & \\ \cdots & \longrightarrow & H_n(\mathbb{A}') & \xrightarrow{i'_*} & H_n(\mathbb{B}') & \xrightarrow{p'_*} & H_n(\mathbb{C}') & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(\mathbb{A}') & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

证　(i) 只需证(i)中同态列在$H_n(\mathbb{B})$,$H_n(\mathbb{C})$,$H_{n-1}(\mathbb{A})$处正合.

(a) 在$H_n(\mathbb{B})$处正合,即$\mathrm{Im}\,i_*=\mathrm{Ker}\,p_*$.

$\mathrm{Im}\,i_*\subseteq\mathrm{Ker}\,p_*$是易证的. 因为

$$p_*i_*=H_n(p)H_n(i)=H_n(pi)=H_n(0)=0$$

$\mathrm{Ker}\,p_*\subseteq\mathrm{Im}\,i_*$:为方便书写与阅读,下面的图追踪均省去足码.

$\forall\, y+B(\mathbb{B})\in\mathrm{Ker}\,p_*$ 即 $p(y)\in B(\mathbb{C})=\mathrm{Im}\,d_C\Rightarrow\exists\, c\in C$ 使 $p(y)=d_C(c)\underset{p满}{\Longrightarrow}\exists\, b\in B$ 使 $c=p(b)\Rightarrow p(y)=d_C(c)=d_Cp(b)\underset{交换图}{=\!=}pd_B(b)\Rightarrow y-d_B(b)\in\mathrm{Ker}\,p\underset{正合}{=\!=}\mathrm{Im}\,i\Rightarrow\exists\, a\in A$ 使 $i(a)=y-d_B(b)\Rightarrow id_A(a)\underset{交换图}{=\!=}d_Bi(a)=d_B(y-d_B(b))\underset{\mathbb{B}为复形}{=\!=}d_B(y)\underset{y\in Z(\mathbb{B})}{=\!=}0\underset{i单}{\Longrightarrow}d_A(a)=0\Rightarrow a\in Z(\mathbb{A})\Rightarrow i_*(a+B(\mathbb{A}))=i(a)+B(\mathbb{B})\underset{由上}{=\!=}y-d_B(b)+B(\mathbb{B})=y+B(\mathbb{B})\Rightarrow y+B(\mathbb{B})\in\mathrm{Im}\,i_*$.

(b) 在 $H_n(\mathbb{C})$处正合，即 $\mathrm{Im}p_* = \mathrm{Ker}\partial$.

先证 $\mathrm{Im}p_* \subseteq \mathrm{Ker}\partial$，即$\partial p_*(y+B(\mathbb{B}))=0$.

$\partial p_*(y+B(\mathbb{B})) = \partial p(y) + B(\mathbb{A}) \xlongequal[\text{定理2,}\partial\text{定义}]{} (i^{(-1)} d_B p^{(-1)}) \cdot p(y) + B(\mathbb{A}) = i^{(-1)} d_B(y) + B(\mathbb{A}) \xlongequal[\substack{d_B(y)=0 \\ (y\in \mathrm{Ker}d_B)}]{} B(\mathbb{A}) = 0$（指 $Z(\mathbb{A})/B(\mathbb{A})$中的 0）.

再证 $\mathrm{Ker}\partial \subseteq \mathrm{Im}p_*$.

$\forall z + B(\mathbb{C}) \in \mathrm{Ker}\partial \Rightarrow \partial(z + B(\mathbb{C})) = B(\mathbb{A}) \xlongequal[\partial\text{定义}]{} i^{(-1)} d_B p^{(-1)}(z) \in B(\mathbb{A}) = \mathrm{Im}d_A \Rightarrow \exists a \in A$ 使 $i^{(-1)} d_B p^{(-1)}(z) = d_A(a) \xRightarrow[i\text{作用}]{} d_B p^{(-1)}(z) = i d_A(a) \xlongequal[\text{交换图}]{} d_B i(a) \Rightarrow$取 $y \equiv p^{-1}(z) - i(a) \in \mathrm{Ker}d_B = Z(\mathbb{B}) \xRightarrow[p_*\text{作用}]{} p_*(y + B(\mathbb{B})) = p_*(p^{(-1)}(z) - i(a) + B(\mathbb{B})) = z - pi(a) + B(\mathbb{C}) \xlongequal[\substack{pi=0 \\ (\text{正合})}]{} z + B(\mathbb{C}) \Rightarrow \mathrm{Ker}\partial \subseteq \mathrm{Im}p_*$.

(c) 在 $H_{n-1}(\mathbb{A})$处正合，即 $\mathrm{Im}\partial = \mathrm{Ker}i_*$.

先证 $\mathrm{Im}\partial \subseteq \mathrm{Ker}i_*$，即 $i_*\partial = 0$.

$\forall z + B(\mathbb{C}) \in H(\mathbb{C}), i_*\partial(z + B(\mathbb{C})) \xlongequal[\partial\text{定义}]{} i_*(i^{(-1)} d_B p^{(-1)}(z) + B(\mathbb{A})) = d_B p^{(-1)}(z) + B(\mathbb{B}) \xlongequal[d_B(\cdots)\in B(\mathbb{B})]{} B(\mathbb{B}) = 0 \Rightarrow i_*\partial = 0$.

再证 $\mathrm{Ker}i_* \subseteq \mathrm{Im}\partial$.

$\forall x + B(\mathbb{A}) \in \mathrm{Ker}i_*$，即 $i_*(x + B(\mathbb{A})) = i(x) + B(\mathbb{B}) = B(\mathbb{B}) \Rightarrow \exists b \in B$ 使 $i(x) = d_B(b) \xlongequal[p\text{作用}]{} 0 \xlongequal[\text{正合}]{} pi(x) = pd_B(b) \xlongequal[\text{交换图}]{} d_C p(b) \Rightarrow p(b) \in Z(\mathbb{C}) \Rightarrow p(b) + B(\mathbb{C}) \in H(\mathbb{C}) \xRightarrow[\partial = i^{(-1)} d_B p^{(-1)}\text{作用}]{} \partial(p(b) + B(\mathbb{C})) = i^{(-1)} d_B(b) + B(\mathbb{A}) \xlongequal[\text{由上}d_B(b)=i(x)]{} x + B(\mathbb{A}) \in \mathrm{Im}\partial \Rightarrow \mathrm{Ker}i_* \subseteq \mathrm{Im}\partial$.

(ii) ①、②为交换图，H_n 为共变函子⇒①′、②′为交换图.

定理 2 之证的追踪⇒$\forall c + B(\mathbb{C}) \in H_n(\mathbb{C}), \exists b, a$ 使 $p(b)$

$= c, i(a) = d_B(b)$.

$$p(b) = c \underset{h\text{作用}}{\Longrightarrow} h\,p(b) = h(c) \Rightarrow p'g(b) = h(c) \qquad (*)$$

$$\| \text{交换图}$$

$$p'g(b)$$

$$i(a) = d_B(b) \underset{g\text{作用}}{\Longrightarrow} gi(a) = gd_B(b)$$

$$\| \qquad\qquad \| \text{(交换图)}$$

$$i'f(a) \quad d'_B g(b)$$

$$\Rightarrow i'f(a) = d'_B g(b). \qquad (**)$$

$(*)$、$(**)\Rightarrow \partial([c]) = [a]$时必有$\partial'([h(c)]) = [f(a)]$，故 $f_*\partial = \partial' h_*$，即③′是交换图. □

由定理 3 立得如下推论.

推论 3 （Ⅰ）设

$$0 \longrightarrow \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow 0$$

为复形正合列，则

(i) $\mathbb{A}$、$\mathbb{B}$、$\mathbb{C}$ 中若有两个为零调复形，则另一个也是零调复形；

(ii) 当$\mathbb{A}$为零调复形时，$\mathbb{B}$，$\mathbb{C}$有相同的同调模(也称$\mathbb{B}$，$\mathbb{C}$是同调的)；当$\mathbb{C}$为零调复形时，$\mathbb{A}$，$\mathbb{B}$有相同的同调模(即$\mathbb{A}$，$\mathbb{B}$是同调的).

（Ⅱ）同构的复形必是同调的(同调模相同).

作为上述证法与结果的应用，我们可得模论与同调代数中两个有用的结果.

定理 4 （蛇引理(Snake Lemma)).设在$_R\mathfrak{M}$ 中有行正合交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & A & \longrightarrow & B & \xrightarrow{p} & C & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \\
0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{i} & B' & \longrightarrow & C' & &
\end{array}$$

则

(i) 有正合列

$$\mathrm{Ker}\alpha \to \mathrm{Ker}\beta \to \mathrm{Ker}\gamma \xrightarrow{\partial} \mathrm{Coker}\alpha \to \mathrm{Coker}\beta \to \mathrm{Coker}\gamma$$

其中$\partial: c \longmapsto i^{(-1)}\beta p^{(-1)}(c) + \mathrm{Im}\alpha, \forall c \in \mathrm{Ker}\gamma$;

(ii) 上图中 $A \to B$ 为单同态时,(i)中的 $\mathrm{Ker}\alpha \to \mathrm{Ker}\beta$ 也必是单同态;$B' \longrightarrow C'$ 为满同态时,(i)中的 $\mathrm{Coker}\beta \to \mathrm{Coker}\gamma$ 也是满同态;

(iii) 上图中 $A \to B$ 为单同态且 $B' \to C'$ 为满同态时有正合列

$$0 \to \mathrm{Ker}\alpha \to \mathrm{Ker}\beta \to \mathrm{Ker}\gamma \to \mathrm{Coker}\alpha \to \mathrm{Coker}\beta \to \mathrm{Coker}\gamma \to 0$$

证 由第一章§4 命题 1 与命题 1°可得行正合交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \mathrm{Ker}\alpha & \longrightarrow & \mathrm{Ker}\beta & \longrightarrow & \mathrm{Ker}\gamma & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & A & \longrightarrow & B & \xrightarrow{p} & C & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \\
0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{i} & B' & \longrightarrow & C' & & \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\pi} & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \mathrm{Coker}\alpha & \longrightarrow & \mathrm{Coker}\beta & \longrightarrow & \mathrm{Coker}\gamma & &
\end{array}$$

按定理 2 的证法沿虚箭头方向追踪即得完全确定的∂(注意上图的 π 为标准同态).容易验证(i)中的列是正合的.由(i)可得(ii).由(i)、(ii)即得(iii). □

由蛇引理立得

推论 4(9-引理,也称为 3×3 引理) 设在$_R\mathfrak{M}$ 中有列正合的交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \rightarrow & A & \rightarrow & B & \rightarrow & C & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \\
0 & \rightarrow & A' & \rightarrow & B' & \rightarrow & C' & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \\
0 & \rightarrow & A'' & \rightarrow & B'' & \rightarrow & C'' & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

则上两行正合时下行必正合;下两行正合时上行必正合.

证 注意上行为 f,g,h 的核,下行为 α,β,γ 的上核,用蛇引理即得证. □

下面引进拓扑学中"同伦"的概念来讨论同伦与同调的关系.事实上即研究:有何关系的链映射 f、g 可(经 H_n 作用)得到相同的 f_*、g_*?

先引进同伦的定义.

定义 8 设 $f:\mathbb{A}\rightarrow\mathbb{A}'$为复形的链映射,若有同态 $s_n:A_n\rightarrow A'_{n+1}$使(见下图)

$$f_n=d'_{n+1}s_n+s_{n-1}d_n,\ \forall\, n\in\mathbb{Z}.$$

即下图为交换图,

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \rightarrow & A_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & A_n & \xrightarrow{d_n} & A_{n-1} & \rightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f_{n+1}} & \swarrow{\scriptstyle s_n} & \downarrow{\scriptstyle f_n} & \swarrow{\scriptstyle s_{n-1}} & \downarrow{\scriptstyle f_{n-1}} & & \\
\cdots & \rightarrow & A'_{n+1} & \xrightarrow{d'_{n+1}} & A'_n & \xrightarrow{d'_n} & A'_{n-1} & \rightarrow & \cdots
\end{array}$$

则称链映射 f 是**零伦的**(nullhomotopic),记为 $f\sim 0$.

若 $f,g:\mathbb{A}\to\mathbb{A}'$ 都是链映射且 $f-g\sim 0$,即有 $s_n:A_n\to A'_{n+1}$ 使

$$f_n-g_n=d'_{n+1}s_n+s_{n-1}d_n,\ \forall n\in\mathbb{Z},$$

则称 f 同伦于 g,记为 $f\sim g$,且说 $\{s_n\}$ 形成一个**同伦**(homotopy).

容易看出:

$0\sim 0$; $f\sim 0\Rightarrow -f\sim 0$ (换 s_n 为$(-s_n)$)

$f\sim f$; $f\sim g\Rightarrow g\sim f$

$f\sim g, g\sim h\Rightarrow f\sim h$

因此有

推论 5 在复形的链映射群 $\mathrm{Hom}(\mathbb{A},\mathbb{A}')$ 上,同伦为一个等价关系.

现在来证同伦的基本性质,从中我们可看到同伦的作用.

定理 5 设 $f\sim g\in\mathrm{Hom}(\mathbb{A},\mathbb{A}')$,则

$$f_*=g_*:H_n(\mathbb{A})\longrightarrow H_n(\mathbb{A}'),\quad \forall n\in\mathbb{Z}$$

即,

$$H(f)=H(g):H(\mathbb{A})\longrightarrow H(\mathbb{A}')$$

证 $\forall z\in Z_n(\mathbb{A})$,则有

$f\sim g\Rightarrow f(z)-g(z)=d's(z)+sd(z)\xlongequal[d(z)=0]{}d's(z)\Rightarrow f(z)-g(z)\in B_n(\mathbb{A}')\Rightarrow f_*=g_*$. □

后面将举例说明定理 5 之逆不成立,这一点宜注意.再来看看同伦与合成的关系.

命题 3 设 $f\sim g:\mathbb{A}\to\mathbb{A}'$, $f'\sim g':\mathbb{A}'\to\mathbb{A}''$,则

$$f'f\sim g'g:\mathbb{A}\to\mathbb{A}''$$

证 $f\sim g\Rightarrow$有 s 使 $f-g=d's+sd\Rightarrow f'f-f'g=f'd's+f'sd\xlongequal[f'd'=d'f']{}d'(f's)+(f's)d\Rightarrow f'f\sim f'g$.

$f'\sim g'\Rightarrow$有 s' 使 $f'-g'=d''s'+s'd'\Rightarrow f'g-g'g=d''s'g+s'd'g\xlongequal[gd'=d'g]{}d''(s'g)+(s'g)d'\Rightarrow f'g\sim g'g$.

于是由"～"的可传性即得 $f'f \sim g'g$. □

关于加法函子与同伦的关系,我们介绍如下的结果.

命题 4 设 $F: {}_R\mathfrak{M} \to {}_S\mathfrak{M}$ 为加法共变函子,则 $f \sim g: \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ 时必有 $Ff \sim Fg: F\mathbb{A} \to F\mathbb{A}'$. 即,加法共变函子保同伦.

证 由 $f \sim g$ 知有 s 使 $f - g = d's + sd$. 于是有

$$Ff - Fg = F(f - g) = F(d's + sd) = Fd'Fs + FsFd$$

故 $Ff \sim Fg$. □

由命题 4 与定理 5 立得定理 5 的推广形式:

定理 5′ 设 $f \sim g: \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$, F 为加法共变函子,则

$$(Ff)_* = (Fg)_*: H(F\mathbb{A}) \longrightarrow H(F\mathbb{A}')$$

即 $H(Ff) = H(Fg)$.

注 1 命题 3 将复形范畴(对象类为复形类,态射为链映射)转化为同伦范畴(对象类为复形类,态射为链映射的同伦类). 由命题 4 知,加法共变函子是复形范畴间的共变函子,也是同伦范畴间的共变函子. 定理 5 与定理 5′说明同调函子 H 对复形范畴起到了"化简"态射的作用(不再区分同伦的态射).

注 2 对上复形、上同调有对偶于本节的结果.

注 3 定理 5 之逆并不成立. 即

$$f_* \sim g_* \not\Rightarrow f \sim g.$$

见下例自明.

例 2 设 $R = \mathbb{Z}$, 考察 ${}_R\mathfrak{M}$ 复形

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
\mathbb{A} = \cdots \to 0 \to 0 \to \cdots \to 0 \to & \mathbb{Z} & \xrightarrow{d_1} & \mathbb{Z} & \to 0 \to \cdots \to 0 \to \cdots \\
& \| & & \| & \\
& A_1 & & A_2 & \\
& \| & & \| & \\
& \langle s_1 \rangle & & \langle s_0 \rangle &
\end{array}$$

其中 $d_1(s_1) = 2s_0$,

$$\mathbb{A}'=\cdots\to 0\to 0\to\cdots\to 0\to \underset{\underset{\langle t_1\rangle}{\parallel}}{\underset{A'_1}{\underset{\parallel}{\mathbb{Z}}}}\to 0\to 0\to\cdots\to 0\to\cdots$$

设 $f:\mathbb{A}\to\mathbb{A}'$ 使 $f_1(s_1)=t_1, f_j=0, j\neq 1, j\in\mathbb{Z}, g=0:\mathbb{A}\to\mathbb{A}'$，则可看出 $f_*=g_*=0:H(\mathbb{A})\to H(\mathbb{A}')$，但 $f\sim g$ 并不成立.

事实上，取加法共变函子 $F=-\underset{\mathbb{Z}}{\otimes}\mathbb{Z}_2$，则

$$H_1(Ff)=H_1(f\otimes I_{\mathbb{Z}_2})=I_{\mathbb{Z}_2}:\mathbb{Z}_2\to\mathbb{Z}_2$$

$$H_1(Fg)=H_1(g\otimes I_{\mathbb{Z}_2})=H_1(0\otimes I_{\mathbb{Z}_2})=0:\mathbb{Z}_2\to\mathbb{Z}_2$$

因此

$$H_1(f\otimes I_{\mathbb{Z}_2})\neq H_1(g\otimes I_{\mathbb{Z}_2})$$

即

$$H_1(Ff)\neq H_1(Fg)$$

由定理 5′即知 $f\sim g$ 不能成立.

最后，我们给出下述定义.

定义 9 设 $\mathbb{A}$，$\mathbb{A}'$ 为复形，若 $H_n(\mathbb{A})=H_n(\mathbb{A}'), \forall n\in\mathbb{Z}$，则称 $\mathbb{A}$ 与 $\mathbb{A}'$ 为**同调的**. 若有链映射 $f:\mathbb{A}\to\mathbb{A}'$ 与 $g:\mathbb{A}'\to\mathbb{A}$ 使

$$fg\sim I_{\mathbb{A}'} \text{ 且 } gf\sim I_{\mathbb{A}}$$

(即 f,g 为同伦范畴中的同构)，则称 $f(g)$ 为 $\mathbb{A}$ 到 $\mathbb{A}'$($\mathbb{A}'$ 到 $\mathbb{A}$)的**同伦等价**，并称 $\mathbb{A}$，$\mathbb{A}'$ 是**同伦的**.

与在拓扑学中一样，对复形有

$$\text{同构}\underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}\text{同伦}\underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}\text{同调}$$

习 题 3.1

1. 证明 $\mathrm{Comp}({}_R\mathfrak{M})$ 为预加法范畴.

2. 设 $\mathbb{C}_{\mathbf{Z}}$ 为一个范畴，$\mathrm{Ob}\mathbb{C}_{\mathbf{Z}}=\mathbb{Z}$，态射集为

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}_{\mathbf{Z}}}(m,n)=\begin{cases}\varphi^m_{m+1}, & n=m+1\text{ 时},\\ 0, & n>m+1\text{ 时},\\ \varnothing, & n<m+1\text{ 时}.\end{cases}\quad \forall m,n\in\mathbb{Z}$$

且态射合成规定为:可合成态射之合成总为 0,则任一个${}_R\mathfrak{M}$复形$\mathbb{A}$都是共变函子$\mathbb{A}:\mathbb{C}_{\mathbb{Z}}\to{}_R\mathfrak{M}$且链映射$f:\mathbb{A}\to\mathbb{A}'$为自然变换.

3. 用长正合列定理(定理 3)证明 9-引理(推论 4).

4. 对加法反变函子 F,能否得出类似于命题 4 的结果? 为什么?

§2 导出函子与长正合列

本节的主要目的是用加法函子作用于一个模的投射分解或内射分解得到相应的复形.从而由这些复形的同调模引出一系列导出函子.从函子角度上看,这些导出函子在同调代数中处于头等重要的地位.

首先注意,对任一个(左或右)R-模 M 的投射分解

$$\cdots\to P_n\xrightarrow{d_n}P_{n-1}\to\cdots\to P_1\xrightarrow{d_1}P_0\to M\to 0$$

$M\simeq\mathrm{Coker}d_1$.因此删去 M(仍有 d_1)并未丢失任何信息.对 M 的内射分解也有对偶的情况,删去 M 也未丢失信息(M 为 $0\to M\to E^0\xrightarrow{d^0}E^1\to\cdots$中 d^0 的核).因此对一般的下述复形,我们也用此法处理(可以看出并不改变第 n 个同调模,$\forall\, n\geqslant 1$).从而得到如下定义.

定义 1 设有复形

$$\mathbb{X}_M=\cdots\to X_1\xrightarrow{d_1}X_0\xrightarrow{\varepsilon}M\longrightarrow 0$$

删去 M 得到的新复形

$$\mathbb{X}_{\hat{M}}=\cdots\to X_1\xrightarrow{d_1}X_0\xrightarrow{d_0=0}0$$

称为复形$\mathbb{X}_M$的**删项复形**(deleted complex),也叫**舍元复形**.

类似地称上复形

$$\mathbb{Y}_{\hat{N}}=0\xrightarrow{d^{-1}=0}Y^0\xrightarrow{d^0}Y^1\to\cdots$$

为上复形

$$\mathbb{Y}_N=0\longrightarrow N\xrightarrow{\varepsilon}Y^0\xrightarrow{d^0}Y^1\to\cdots$$

的**删项上复形**(deleted cocomplex).

下面我们来证明两个复形变成它们的删项复形后,不但不变各自的第 n 个同调模($\forall n\geqslant 1$),而且在一定的情况下(正是后面要用到的情况),不计同伦的差别时也保持着由删去模之间的同态所诱导的链映射.即

定理 1(比较定理(comparision theorem)) 设在行为复形的实箭头所示的下图中,$f:M\to M'$为已知的模同态.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
\mathbb{X}_M = \cdots & \longrightarrow & X_2 & \xrightarrow{d_2} & X_1 & \xrightarrow{d_1} & X_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle \bar f_2} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \bar f_1} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \bar f_0} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f} & & \\
\mathbb{X}'_{M'} = \cdots & \longrightarrow & X'_2 & \xrightarrow[d'_2]{} & X'_1 & \xrightarrow[d'_1]{} & X'_0 & \xrightarrow[\varepsilon']{} & M' & \longrightarrow & 0
\end{array}
$$

若上行中 $X_n\in \mathrm{P}_R\mathfrak{M}(P\mathfrak{M}_R)$, $n=0,1,2,\cdots$(上行未必正合),下行为${}_R\mathfrak{M}(\mathfrak{M}_R)$中的正合列.则有链映射 $\bar f:\mathbb{X}_{\hat M}\to\mathbb{X}'_{\hat M'}$ 使上图为交换图,且在同伦意义下 $\bar f$ 是唯一的.即若又有链映射 $h:\mathbb{X}_{\hat M}\to\mathbb{X}'_{\hat M'}$ 使上图为交换图,则 $\bar f\sim h$.

这个 $\bar f$ 称为 f **上的链映射**.

证 (i) $\bar f$ 的存在性.用数学归纳法来证 $\bar f=\{\bar f_n\}$存在.

$n=0$ 时由 $X_0\in P_R\mathfrak{M}$, ε'为满同态,$f\varepsilon\in \mathrm{Hom}_R(X_0,M')$知 $\bar f_0$ 存在使 $f\varepsilon=\varepsilon'\bar f_0$.设 $i\leqslant n$ 时$\bar f_i$ 都存在使相应的图为交换图.来证 $\bar f_{n+1}$必存在且使新图为交换图.

由图

$$\begin{array}{ccc} X_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & X_n \\ {\scriptstyle \bar{f}_{n+1}}\downarrow & \searrow^{\bar{f}_n d_{n+1}} & \downarrow{\scriptstyle \bar{f}_n} \\ X'_{n+1} & \xrightarrow[d'_{n+1}]{} & \mathrm{Im}d'_{n+1} \longrightarrow 0 \end{array}$$

(其中 $X_{n+1}\in P_R\mathfrak{M}$, d'_{n+1} 为满同态)知,只需证

$$\mathrm{Im}(\bar{f}_n d_{n+1})\subseteq \mathrm{Im}d'_{n+1}=\mathrm{Ker}d'_n \text{(下行正合)}$$

即知 $\bar{f}_{n+1}$ 是存在的.

事实上,由

$$d'_n\bar{f}_n d_{n+1} \underset{\substack{\text{归纳假设}\\ d'_n\bar{f}_n=\bar{f}_{n-1}d_n}}{=\!=\!=} \bar{f}_{n-1}d_n d_{n+1} \underset{d_n d_{n+1}=0}{=\!=\!=} 0$$

即知.

(ii) $\bar{f}$ 的同伦唯一性.

设又有 $h:\mathbb{X}_{\hat{M}}\longrightarrow\mathbb{X}_{\hat{M}'}$ 使该图为交换图,则

$$\varepsilon' h_0=f\varepsilon$$

为便于使用归纳法,约定 $M=X_{-1}\xrightarrow[s_{-1}=0]{}X'_0$ 来证有 $s=\{s_n\}$ 存在使

$$h_i-\bar{f}_i=d'_{i+1}s_i+s_{i-1}d_i$$

注意 $X_0\in P_R\mathfrak{M}$. $d'_1:X'_1\twoheadrightarrow \mathrm{Im}d'_1$ 为满同态,可知存在 s_0 使下图为交换图

$$\begin{array}{ccccc} & & X_0 & \xrightarrow[\text{①}]{\varepsilon} & M \\ & \swarrow^{s_0} & \downarrow{\scriptstyle h_0-\bar{f}_0} & \swarrow_{s_{-1}=0} & \downarrow{\scriptstyle f-f=0} \\ X'_1 & \xrightarrow[d'_1]{} & \mathrm{Im}d'_1 & \xrightarrow[d'_0=\varepsilon']{} & 0 \end{array}$$

$d'_1s_0+s_{-1}\varepsilon=d'_1s_0=h_0-\bar{f}_0$

这是因为①是交换的,因此 $d'_0(h_0-\bar{f}_0)=0$,由此已知

$$\operatorname{Im}(h_0-\bar{f}_0)\subseteq \operatorname{Im}d'_1=\operatorname{Ker}d'_0$$

于是可用 $X_0\in \mathrm{P}_R\mathfrak{M}$ 知 s_0 的存在.

现设 $i\leqslant n$ 时 s_n 都存在,来证 s_{n+1} 存在使

$$h_{n+1}-\bar{f}_{n+1}=d'_{n+2}s_{n+1}+s_nd_{n-1}.$$

考察下图

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X_{n+1} & \xrightarrow[\text{②}]{d_{n+1}} & X_n \\
 & \swarrow{\scriptstyle s_{n+1}} & \Big\downarrow{\scriptstyle h_{n+1}-\bar{f}_{n+1}-s_nd_{n+1}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle h_n-\bar{f}_n-s_{n-1}d_n} \\
X'_{n+2} & \xrightarrow{d'_{n+2}} & \operatorname{Im}d'_{n+2} & \xrightarrow{d'_{n+1}} & 0
\end{array}$$

由 $X_{n+1}\in \mathrm{P}_R\mathfrak{M}$ 及 $d'_{n+2}:X'_{n+2}\twoheadrightarrow \operatorname{Im}d'_{n+2}$满知,只需证

$$\operatorname{Im}(h_{n+1}-\bar{f}_{n+1}-s_nd_{n+1})\subseteq \operatorname{Im}d'_{n+2}\underset{\text{下行正合}}{=\!=\!=}\operatorname{Ker}d'_{n+1}$$

即证

$$d'_{n+1}(h_{n+1}-\bar{f}_{n+1}-s_nd_{n+1})=0$$

事实上这由上图②的交换性即知.

□

下面由此定理对加法共变函子 T 由 $M\in\mathfrak{M}_R$ 的删项投射分解(看成复形的删项复形)$\mathbb{P}_{\hat{M}}$来定义 T 的左导出函子.

定义 2 设 T 为加法共变函子,$M\in\mathfrak{M}_R$,$\mathbb{P}_{\hat{M}}$为 M 的删项投射分解:

$$\mathbb{P}_{\hat{M}}=\cdots\longrightarrow P_n\xrightarrow{d_n}P_{n-1}\longrightarrow\cdots\longrightarrow P_1\xrightarrow{d_1}P_0\longrightarrow 0$$

定义

$$(L_nT)(M)=H_n(T\,\mathbb{P}_{\hat{M}})=\operatorname{Ker}Td_n/\operatorname{Im}Td_{n+1}\quad(\text{足码“小/大”}).$$

对任意的 $f\in \operatorname{Hom}_R(M,M')$定义

$$(L_nT)(f):(L_nT)(M)\longrightarrow(L_nT)(M')$$

使

$$(L_nT)(f)=H_n(T\bar{f})=(T\bar{f})_*$$

其中 $\bar{f}$ 为 f 上的链映射，即对下图

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & TP_n & \xrightarrow{Td_n} & TP_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & TP_1 & \xrightarrow{Td_1} & TP_0 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle T\bar{f}_n} & & \downarrow{\scriptstyle T\bar{f}_{n-1}} & & & & \downarrow{\scriptstyle T\bar{f}_1} & & \downarrow{\scriptstyle T\bar{f}_0} \\
\cdots & \longrightarrow & TP'_n & \xrightarrow[Td'_n]{} & TP'_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & TP'_1 & \xrightarrow[Td'_1]{} & TP'_0 \longrightarrow 0
\end{array}$$

$$(L_nT)(f):z_n+\mathrm{Im}Td_{n+1}\longmapsto(T\bar{f}_n)(z_n)+\mathrm{Im}Td'_{n+1}$$

定理 2 设 T 为加法共变函子，则 L_nT 仍为加法共变函子，$\forall\, n\geqslant 0$，称 L_nT 为 T 的**第 n 个左导出函子**，统称为 T 的**左导出函子**(left derived functor).

证 只需证$(L_nT)(f)=H_n(T\bar{f})$是完全确定的，即与 $\bar{f}$ 的选取无关(由 f 得 $\bar{f}$，在同伦意义下是唯一的，但丢开同伦，并不要求唯一). 其余部分是显然的.

设 $h:\mathbb{P}_{\hat{M}}\longrightarrow\mathbb{P}_{\hat{M}'}$也是 f 上的链映射. 则由定理 1 知 $\bar{f}\sim h$. 再由本章 §1 命题 4 知 $T\bar{f}\sim Th$(即 $T\bar{f}\sim\overline{Tf}$). 从而由本章 §1 定理 5 即知

$$H_n(T\bar{f})=H_n(Th)$$ □

为了具体应用，我们再给出如下定义.

定义 3 设 $T=-\bigotimes_R N$，$N\in{}_R\mathfrak{M}$，记 $L_nT=\mathrm{Tor}_n^R(-,N)$或 $\mathrm{Tor}_n(-,N)$，称为由 N 给出的第 n 个**挠函子**或 Torsion **函子**(或 Tor **函子**). 此时对任意的 $M\in\mathfrak{M}_R$，

$$\mathrm{Tor}_n^R(M,N)=\mathrm{Ker}(d_n\otimes I_N)/\mathrm{Im}(d_{n+1}\otimes I_N)$$

其中 d_n，d_{n+1}为 M 的投射分解

$$\mathbb{P}_M = \cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0 \tag{1}$$

中的同态.

在本章§4我们将会看到 Tor 函子在刻画环 R 的弱维数方面起着重要的作用,且带来很大的方便.

由上定义,我们有

命题 1 设 T 为右正合(加法)函子,则 $L_0 T \underset{\text{nat}}{\simeq} T$,因此

$$\mathrm{Tor}_0^R(M,N) \underset{\text{nat}}{\simeq} M \underset{R}{\otimes} N, \quad \forall M \in \mathfrak{M}_R, N \in {}_R\mathfrak{M}$$

证 取 M 的投射分解如(1). 由 T 为右正合的,知

$$TP_1 \xrightarrow{Td_1} TP_0 \longrightarrow TM \longrightarrow 0$$

正合. 因此

$$TM \simeq TP_0 / \mathrm{Im}\, Td_1$$

但对$\mathbb{P}_{\hat{M}}$经 T 作用后为

$$\cdots \longrightarrow TP_1 \xrightarrow{Td_1} TP_0 \xrightarrow{T0=0} 0$$

于是

$$(L_0 T)M = H_0(T\,\mathbb{P}_{\hat{M}}) = TP_0 / \mathrm{Im}\, Td_1 \simeq TM$$

此同构显然是自然的. □

注 1 由第一章§7知,左正合、右正合函子必是加法函子. 因此命题1中的“加法”二字可省去.

由命题1立得如下推论.

推论 1 设 $M \in \mathbb{P}\mathfrak{M}_R$, T 为右正合共变函子,则

$$L_n T(M) = \begin{cases} TM, & n=0 \text{ 时} \\ 0\ , & n>0 \text{ 时} \end{cases}$$

因此

$$\mathrm{Tor}_n^R(M,N) \simeq \begin{cases} M \underset{R}{\otimes} N, & n=0 \text{ 时} \\ 0\ , & n>0 \text{ 时} \end{cases}$$

这里很自然地要问:当取 M 的两个投射分解时所定义的 L_nT 是否相同? 我们证明下述定理以回答这个问题.

定理 3 设 $M\in\mathfrak{M}_R$,$\mathbb{P}_{\hat{M}}$ 由 $\widetilde{\mathbb{P}}_{\hat{M}}$ 均为 M 的删项投射分解. T 为加法共变函子,相应于 $\mathbb{P}_{\hat{M}}$ 与 $\widetilde{\mathbb{P}}_{\hat{M}}$ 的左导出函子为 L_nT 与 $\widetilde{L_n}T$,则

$$L_nT\underset{\text{nat}}{\simeq}\widetilde{L_n}T$$

因此

$$(L_nT)(M)\simeq(\widetilde{L_n}T)(M)$$

即,左导出函子与投射分解的选取是无关的.

证 考察下图

$$\begin{array}{llllllllll}
\mathbb{P}_M= & \cdots \longrightarrow & P_2 & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow 0\\
 & & & & & & & & g=I_M\big\downarrow\big\uparrow g'=I_M & \\
\widetilde{\mathbb{P}}_M= & \longrightarrow & \widetilde{P}_2 & \longrightarrow & \widetilde{P}_1 & \longrightarrow & \widetilde{P}_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow 0
\end{array}$$

由定理 1(比较定理)知,有同伦下唯一的链映射

$$\bar{g}:\mathbb{P}_{\hat{M}}\longrightarrow\widetilde{\mathbb{P}}_{\hat{M}},\quad \bar{g}':\widetilde{\mathbb{P}}_{\hat{M}}\longrightarrow\mathbb{P}_{\hat{M}}$$

经过合成则有

$$\bar{g}'\bar{g}\sim I_{\mathbb{P}_{\hat{M}}},\quad \overline{gg}'\sim I_{\widetilde{\mathbb{P}}_{\hat{M}}}$$

注意到 H_n 为共变函子并用本章§1 定理 5 即知

$$\overline{g'}_*\bar{g}_*=(I_{\mathbb{P}_{\hat{M}}})_*,\quad \bar{g}_*\overline{g'}_*=(I_{\widetilde{\mathbb{P}}_{\hat{M}}})_*$$

因此有

$$\tau_M=(T\bar{g})_*:(L_nT)M\xrightarrow[\simeq]{}(\widetilde{L_n}T)M$$

下证 τ 是自然的即可. 即证对任意的 $f\in\mathrm{Hom}_R(M,N)$,下图(2)是交换的:

$$
\begin{array}{ccc}
(L_nT)M & \xrightarrow{\tau_M=(T\bar{I}_M)_*} & (\widetilde{L}_nT)M \\
\Big\downarrow{\scriptstyle (L_nT)f} & & \Big\downarrow{\scriptstyle (\widetilde{L}_nT)f} \\
(L_nT)N & \xrightarrow[\tau_N=(T\bar{I}_N)_*]{} & (\widetilde{L}_nT)N
\end{array}
\qquad (2)
$$

对此图顺时针方向的合成,考察下图

$$
\begin{array}{l}
\mathbb{P}_M = \cdots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \Big\downarrow{\scriptstyle g=I_M} \\
\widetilde{\mathbb{P}}_M = \cdots \longrightarrow \widetilde{P}_2 \longrightarrow \widetilde{P}_1 \longrightarrow \widetilde{P}_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \Big\downarrow{\scriptstyle f} \\
\widetilde{\mathbb{P}}_N = \cdots \longrightarrow \widetilde{Q}_2 \longrightarrow \widetilde{Q}_1 \longrightarrow \widetilde{Q}_0 \longrightarrow N \longrightarrow 0
\end{array}
$$

将比较定理用于 $fg=fI_M=f$ 知,必有同伦意义下唯一的链映射 $\bar{f}:\mathbb{P}_{\hat{M}} \longrightarrow \widetilde{\mathbb{P}}_{\hat{N}}$.

对图(2)反时针方向的合成,同法考察下图

$$
\begin{array}{l}
\mathbb{P}_M = \cdots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \Big\downarrow{\scriptstyle f} \\
\mathbb{P}_N = \cdots \longrightarrow Q_2 \longrightarrow Q_1 \longrightarrow Q_0 \longrightarrow N \longrightarrow 0 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \Big\downarrow{\scriptstyle I_N} \\
\widetilde{\mathbb{P}}_N = \cdots \longrightarrow \widetilde{Q}_2 \longrightarrow \widetilde{Q}_1 \longrightarrow \widetilde{Q}_0 \longrightarrow N \longrightarrow 0
\end{array}
$$

由 $I_N f = f = f I_M$ 知,此时所得的链映射 $\bar{f}'$ 必同伦于 $\bar{f}$(比较定理).

用 T 作用于上面两图,同理知所得两个在 Tf 上的链映射 $\overline{Tf}, \overline{Tf'} : T\mathbb{P}_{\hat{M}} \longrightarrow T\tilde{\mathbb{P}}_{\hat{N}}$ 仍是同伦的:$\overline{Tf} \sim \overline{Tf'}$. 故由上节定理 5 知

$$H_n(\overline{Tf}) = H_n(\overline{Tf'})$$

即欲证之图(2)是交换的.从而定理证毕. □

由定理 3 立得如下推论.

推论 2 $\mathrm{Tor}_n^R(M,N)$与 M 的投射分解选取无关.

下面我们证明:"计算"$(L_{n+1}T)(M)$可归为"计算"$(L_1 T)(K_{n-1})$,其中 K_{n-1} 为 M 的投射分解(1)中的 $\mathrm{Ker}d_{n-1}$.

命题 2 设 $M \in \mathfrak{M}_R$ 的投射分解为(1),$K_j = \mathrm{Ker}d_j$,T 为加法共变函子,则有(足码和均为 n 的)下述同构(规定 $M = K_{-1}$):

$$(L_{n+1}T)M \simeq (L_n T)K_0 \simeq \cdots \simeq (L_j T)K_{n-j} \simeq \cdots \simeq (L_1 T)K_{n-1}$$

因此

$$\mathrm{Tor}_{n+1}^R(M,N) \simeq \mathrm{Tor}_n^R(K_0,N) \simeq \cdots \simeq \mathrm{Tor}_j^R(K_{n-j},N) \simeq \cdots \simeq \mathrm{Tor}_1^R(K_{n-1},N)$$

证 由(1)知,K_0 有投射分解

$$\cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} K_0 \longrightarrow 0$$

记 $Q_{n-1} = P_n, \Delta_{n-1} = d_n$ 后,可规范化地写为

$$\mathbb{P}_{K_0} = \cdots \longrightarrow Q_1 \xrightarrow{\Delta_1} Q_0 \longrightarrow K \longrightarrow 0$$

于是由定义知

$$(L_n T)K_0 = H_n(T\mathbb{P}_{\hat{K}_0}) = \mathrm{Ker}T\Delta_n / \mathrm{Im}T\Delta_{n+1}$$
$$= \mathrm{Ker}Td_{n+1} / \mathrm{Im}Td_{n+2} = H_{n+1}(T\mathbb{P}_{\hat{M}}) = (L_{n+1}T)M$$

依此类推之即得欲证. □

注 2 命题 2 的结论中之所以不用"="而用"$\simeq$",是因为$\mathbb{P}_{K_j}$尚有其他选择形式.

对偶于左导出函子,可得右导出函子的概念.

定义 2° 设 T 为加法共变函子，$M\in {}_R\mathfrak{M}$，$\mathbb{E}_{\hat{M}}$ 为 M 的删项内射分解：

$$\mathbb{E}_{\hat{M}}=0\longrightarrow E^0\xrightarrow{d^0}E^1\to\cdots\to E^n\xrightarrow{d^n}E^{n+1}\to\cdots \tag{3}$$

定义

$$(R^nT)(M)=H^n(T\mathbb{E}_{\hat{M}})=\mathrm{Ker}(Td^n)/\mathrm{Im}(Td^{n-1})$$

（足码“大/小”）

或记(3)中的 $E^n=E_{-n}$，$d^n=d_{-n}$ 后写成

$$(R^nT)(M)=H_{-n}(T\,\mathbb{E}_{\hat{M}})=\mathrm{Ker}(Td_{-n})/\mathrm{Im}(Td_{-n+1})$$

（足码“小/大”）

且对任意的 $f\in\mathrm{Hom}_R(M,N)$ 定义

$$(R^nT)(f)=(T\underline{f})^*:H^n(T\,\mathbb{E}_{\hat{M}})\longrightarrow H^n(T\,\mathbb{E}_{\hat{N}})$$

其中 $\underline{f}$ 为 f 诱导的相应(上)复形的(上)链映射(其存在性及同伦唯一性对偶于定理 1 可证).

对偶地可证如下结果.

定理 2° 设 T 为加法共变函子，则 R^nT 仍为加法共变函子，$\forall\, n\geqslant 0$，称 R^nT 为 T 的**第 n 个右导出函子**，统称为 T 的**右导出函子**(right derived functor).

定义 3′ 设 $T=\mathrm{Hom}_R(N,—)$. 记 $R^nT=\mathrm{Ext}_R^n(N,—)$ 或 $\mathrm{Ext}^n(N,—)$. 此时

$$\mathrm{Ext}_R^n(N,M)=\mathrm{Ker}d_*^n/\mathrm{Im}d_*^{n-1}$$

其中 d_*^i 意指 M 的内射分解

$$\mathbb{E}_M=0\to M\to E^0\xrightarrow{d^0}E^1\xrightarrow{d^1}E^2\to\cdots\to E^n\xrightarrow{d^n}E^{n+1}\to\cdots$$

中的同态 d^i 在 $\mathrm{Hom}_R(N,—)$ 作用下诱导出的同态. 称 $\mathrm{Ext}_R^n(N,—)$ 为由 N 给出的第 n 个**扩函子**或 Extension **函子**，或 Ext **函子**.

Ext 函子将在刻画环的整体(投射)维数以及统一整体(投射)维数及整体(内射)维数方面起着重要的作用(见下节).

用对偶于命题 1 的证法可得

命题 1′ 设 T 为左正合共变函子，则 $R^0 T \underset{\text{nat}}{\simeq} T$，因此

$$\operatorname{Ext}_R^0(N,M) \underset{\text{nat}}{\simeq} \operatorname{Hom}_R(N,M)$$

推论 1′ 设 $M \in \operatorname{Inj}_R \mathfrak{M}$，则

$$R^n T(M) \simeq \begin{cases} TM, & n=0 \text{ 时} \\ 0, & n>0 \text{ 时} \end{cases}$$

因此

$$\operatorname{Ext}_R^n(N,M) \simeq \begin{cases} \operatorname{Hom}_R(N,M), & n=0 \text{ 时} \\ 0, & n>0 \text{ 时} \end{cases}$$

对偶地可证

定理 3° 设 $M \in {}_R\mathfrak{M}$，$\mathbb{E}_{\hat{M}}$ 与 $\widetilde{\mathbb{E}}_{\hat{M}}$ 均为 M 的删项内射分解，T 为加法共变函子，其相应于 $\mathbb{E}_{\hat{M}}$，$\widetilde{\mathbb{E}}_{\hat{M}}$ 的右导出函子为 $R^n T$ 与 $\widetilde{R^n}T$，则

$$R^n T \underset{\text{nat}}{\simeq} \widetilde{R^n} T$$

因此

$$(R^n T)(M) \simeq (\widetilde{R^n} T)(M)$$

即右导出函子与内射分解的选取无关.

于是有

推论 2′ $\operatorname{Ext}_R^n(N,M)$ 与 M 的内射分解选取无关.

用命题 2 的证法作对偶翻译即得

命题 2° 设 $M \in {}_R\mathfrak{M}$ 的内射分解取为

$$\mathbb{E}_M = 0 \longrightarrow M \xrightarrow{\varepsilon} E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \to \cdots \to E^n \xrightarrow{d^n} E^{n+1} \to \cdots$$

$L^j = \operatorname{Im} d^{j-1}$，$\forall j \geqslant 0$（$L^0 = \operatorname{Im}\varepsilon \simeq M$），$T$ 为共变加法函子，则

$$(R^{n+1} T)M \simeq (R^n T)L^1 \simeq (R^{n-1} T)L^2 \simeq \cdots \simeq (R^1 T)L^n, \forall n \geqslant 0$$

因此

$$\operatorname{Ext}_R^{n+1}(N,M) \simeq \operatorname{Ext}_R^n(N,L^1) \simeq \cdots \simeq \operatorname{Ext}_R^1(N,L^n), \quad \forall n \geqslant 0$$

上面讨论的都是加法共变函子，对加法反变函子也可平行地

定义右导出函子(用内射分解可以定义 L_nT,得到相应结果,但尚未见有适当的右正合函子 T 使能得到新的有意义的函子,因此本节中不予讨论).

定义 4　设 T 为加法反变函子,定义

$$(R^nT)(N)=\mathrm{Ker}Td_{n+1}/\mathrm{Im}Td_n \quad (\text{足码“大/小”})$$

其中 d_n, d_{n+1} 为 N 的投射分解

$$\mathbb{P}_N=\cdots\longrightarrow P_{n+1}\xrightarrow{d_{n+1}}P_n\xrightarrow{d_n}P_{n-1}\longrightarrow\cdots\longrightarrow P_1\longrightarrow P_0\longrightarrow N\longrightarrow 0 \tag{4}$$

中的同态,$N\in{}_R\mathfrak{M}$.

对偶于上面的相应结果之证明可得

定理 4　设 T 为加法反变函子,则 R^nT 也为加法反变函子,且与投射分解的选取无关.称 R^nT 为 T 的**第 n 个右导出函子**或统称为 T 的**右导出函子**.

定义 5　设 $T=\mathrm{Hom}_R(-,M)$,记 $R^nT=\overline{\mathrm{Ext}}_R^n(-,M)$.即用 N 的投射分解(4),取

$$\overline{\mathrm{Ext}}_R^n(N,M)=\mathrm{Ker}d_{n+1}^*/\mathrm{Im}d_n^*$$

其中 $d_j^*=\mathrm{Hom}_R(-,M)(d_j)$.

在下节中我们将证明:对任意的 $M,N\in{}_R\mathfrak{M}$.

$$\mathrm{Ext}_R^n(N,M)\simeq\overline{\mathrm{Ext}}_R^n(N,M)$$

到那时,我们将不再使用$\overline{\mathrm{Ext}}$这种记号.对 Tor 函子我们也将证明

$$\mathrm{Tor}_n^R(M,-)(N)\simeq\mathrm{Tor}_n^R(-,N)(M)$$

由定理 4 并用上面相应结果的类似证明可得

推论 3　$\overline{\mathrm{Ext}}_R^n(N,M)$与 N 的投射分解选取无关,且对 N 的投射分解(4),若记 $K_j=\mathrm{Ker}d_j$,$j\geqslant 0$,任取加法函子 T,则有

$$(R^{n+1}T)N\simeq(R^nT)K_0\simeq(R^{n-1}T)K_1\simeq\cdots\simeq(R^1T)K_{n-1}$$

当 T 左正合时,$R^0T\underset{\mathrm{nat}}{\simeq}T$.因此

$$\overline{\mathrm{Ext}}_R^{n+1}(N,M)\simeq\overline{\mathrm{Ext}}_R^n(K_0,M)\simeq\cdots\simeq\overline{\mathrm{Ext}}_R^1(K_{n-1},M)$$

从上述定义与结果容易得出

推论 4 (i) 设 $\mathrm{lpD}(R)\leqslant n$，则 $\overline{\mathrm{Ext}}_R^{n+j}(M,N)=0$, $\forall j\geqslant 1$, $M,N\in{}_R\mathfrak{M}$；

(ii) 设 $\mathrm{liD}(R)\leqslant n$，则 $\mathrm{Ext}_R^{n+j}(M,N)=0$, $\forall j\geqslant 1$, $M,N\in{}_R\mathfrak{M}$；

(iii) 设 $\mathrm{lWD}(R)\leqslant n$，则 $\mathrm{Tor}_{n+j}^R(M,N)=0$, $\forall j\geqslant 1$, $M\in\mathfrak{M}_R$, $N\in{}_R\mathfrak{M}$.

后两节中我们还将证明推论 4 之逆也是成立的，并给出更系统的一系列结果，以显示 Ext 与 Tor 两类函子的功能与意义.

现在，我们将本节上面给出的左、右导出函子列表如下，以求醒目.

	加法函子 T	用分解	应用于 $T=$	导出函子
左导出函子 L_nT	共　变	$\mathbb{P}_M$	$-\otimes N$ 右正合	$\mathrm{Tor}_n(-,N)$
			$N\otimes-$ 右正合	$\mathrm{Tor}_n(N,-)$
	反　变	$\mathbb{E}_M$	待 研 究	待 研 究
右导出函子 R^nT	共　变	$\mathbb{E}_M$	$\mathrm{Hom}(N,-)$ 左正合	$\mathrm{Ext}^n(N,-)$ ≀ $\overline{\mathrm{Ext}}^n(-,N)$
	反　变	$\mathbb{P}_M$	$\mathrm{Hom}(-,N)$ 左正合	

T 左正合$\Rightarrow R^0T\underset{\mathrm{nat}}{\simeq}T$.

T 右正合$\Rightarrow L_0T\underset{\mathrm{nat}}{\simeq}T$.

下节中将证：R^0T 左正合，L_0T 右正合. 由此即可看出 R^nT 不用$\otimes$(右正合)、L_nT 不用 Hom(左正合)的理由.

为今后的应用，再来介绍导出函子的导出正合列——长正合

列,这是同调代数中又一中心结果.为此先证一条有用的引理——马掌引理.

引理 1　(马掌引理(Horseshoe Lemma))

设下图为$_R\mathfrak{M}(\mathfrak{M}_R)$中下行正合且两列为投射分解的同态图

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \vdots & & & & \vdots & & \\
 & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\
 & & P'_1 & & & & P''_1 & & \\
 & & \downarrow{\scriptstyle d'_1} & & & & \downarrow{\scriptstyle d''_1} & & \\
 & & P'_0 & & & & P''_0 & & \\
 & & \downarrow{\scriptstyle d'_0} & & & & \downarrow{\scriptstyle d''_0} & & \\
0 & \longrightarrow & A' & \overset{}{\underset{i}{\rightarrowtail}} & A & \underset{\pi}{\twoheadrightarrow} & A'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & & & 0 & &
\end{array}$$

则有 A 的投射分解与链映射使三列成复形正合列.当下行可裂时,此复形正合列也可裂.因此,任一 R – 模正合列都可由此给出一个复形正合列.

证　用归纳法.只需证可补成如下页的 3×3 图使各行正合且下行可裂时上两行也可裂即可.

为此,用①、②、③、④、⑤标示补图顺序,并在图下简述作法与理由即可.

其中

①、②:构作直和,取标准单射 i_0 与标准满射 π_0;

③: 由 $P''_0 \in P_R\mathfrak{M}$ 补图得 σ;

④: 定义 d_0 使 $d_0((x',x'')) = id'_0x' + \sigma x''$, $\forall x' \in P'_0, x'' \in P''_0$;

⑤: 用第一章§4 命题 1 补图得 i_1, π_1,并用五引理知 i_1 单、π_1 满.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & K_0'=\mathrm{Ker}d_0' & \xrightarrow[⑤]{i_1} & K_0=\mathrm{Ker}d_0 & \xrightarrow[⑤]{\pi_1} & \mathrm{Ker}d_0''=K_0'' & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow ① & & \downarrow & & \\
 & & P_0' & \xrightarrow[i_0]{②} & P_0=P_0'\oplus P_0'' & \xrightarrow[\pi_0]{②} & P_0'' & & \\
 & & d_0'\downarrow & \searrow id_0' & ④\downarrow d_0 & \swarrow \sigma\ ③ & \downarrow d_0'' & & \\
0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{i} & A & \xrightarrow{\pi} & A'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}
$$

当下行可裂时，由中行的当然可裂性知上行亦可裂. □

现在可证下述的重要定理.

定理5((左导出函子的)长正合列定理) 设 T 为加法共变函子，

$$0\longrightarrow A'\xrightarrow{i}A\xrightarrow{\pi}A''\longrightarrow 0$$

(在${}_R\mathfrak{M}$ 中)正合，则有自然的连接同态

$$\partial_n: L_nTA''\longrightarrow L_{n-1}TA',\quad n\geqslant 1$$

使有右正合的长正合列

$$\cdots\longrightarrow L_nTA'\xrightarrow{i_*}L_nTA\xrightarrow{\pi_*}L_nTA''\xrightarrow{\partial_n}L_{n-1}TA'\longrightarrow L_{n-1}TA$$
$$\longrightarrow L_{n-1}TA''\xrightarrow{\partial_{n-1}}\cdots\longrightarrow L_1TA''\xrightarrow{\partial_1}L_0TA'\longrightarrow L_0TA\longrightarrow L_0TA''$$
$$\longrightarrow 0$$

因此 L_0T 必为右正合的.

证 由马掌引理可知，有 A',A,A''的删项投射分解所成的复形使成复形短正合列

$$0\longrightarrow \mathbb{P}'_{\hat{A}'}\xrightarrow{\bar{i}}\mathbb{P}_{\hat{A}}\xrightarrow{\bar{\pi}}\mathbb{P}''_{\hat{A}''}\longrightarrow 0$$

且 $P_n = P'_n \oplus P''_n, \forall n \geqslant 0$.

因为 T 为加法共变函子,必保持有限直和(第一章 §7 定理 3),因此有短正合列

$$0 \longrightarrow T\,\mathbb{P}'_{\hat{A}'} \longrightarrow T\,\mathbb{P}_{\hat{A}} \longrightarrow T\,\mathbb{P}''_{\hat{A}''} \longrightarrow 0$$

再由复形同调的长正合列定理(上节定理 3)知,必有自然的连接同态

$$\begin{array}{ccc} \partial_n : H_n(T\,\mathbb{P}''_{\hat{A}''}) & \longrightarrow & H_{n-1}(T\,\mathbb{P}'_{\hat{A}'}) \\ \| & & \| \\ L_nTA'' & & L_{n-1}TA' \end{array}$$

使有与投射分解选取无关的长正合列. 再注意 $L_nT = 0, \forall n < 0$ 即得证. □

我们还可强化定理 5,并给出以函子角度给出的相应于定理 5 的结果. 为此先引入如下的定义.

定义 6　设 T, T' 为加法共变函子,$\tau: T \rightarrow T'$ 为自然变换,$A \in {}_R\mathfrak{M}$,$\mathbb{P} = \mathbb{P}_{\hat{A}}$ 为 A 的投射分解所成的删项复形. 定义

$$\tau_{\mathbb{P}} : T\,\mathbb{P} \longrightarrow T'\mathbb{P}$$

为链映射使 $(\tau_{\mathbb{P}})_n = \tau_{P_n} : TP_n \longrightarrow T'P_n$.

$\tau_{\mathbb{P}}$ 诱导的自然变换记为

$$\tau_A : L_nTA \longrightarrow L_nT'A$$

可以用立体交换图的追踪验证下述结果.

命题 3　设 $\tau: T \rightarrow T'$ 为加法共变函子 T、T' 间的自然变换且

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{i} & A & \xrightarrow{\pi} & A'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \varphi'} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi''} & & \\ 0 & \longrightarrow & B' & \xrightarrow[i']{} & B & \xrightarrow[\pi']{} & B'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

为$_R\mathfrak{M}$中行正合交换图，则有两个行正合的交换图：

$$
\text{(i)}\quad
\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \longrightarrow & L_nTA' & \xrightarrow{i_*} & L_nTA & \xrightarrow{\pi_*} & L_nTA'' & \xrightarrow{\partial_n} & L_{n-1}TA' & \longrightarrow \cdots \\
 & \downarrow{\scriptstyle \tau_{A'}} & & \downarrow{\scriptstyle \tau_{A}} & & \downarrow{\scriptstyle \tau_{A''}} & & \downarrow{\scriptstyle \tau_{A'}} & \\
\cdots \longrightarrow & L_nT'A' & \xrightarrow{i_*} & L_nT'A & \xrightarrow{\pi_*} & L_nT'A'' & \xrightarrow{\partial'_n} & L_{n-1}T'A' & \longrightarrow \cdots
\end{array}
$$

$$
\text{(ii)}\quad
\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \longrightarrow & L_nTA' & \xrightarrow{i_*} & L_nTA & \xrightarrow{\pi_*} & L_nTA'' & \xrightarrow{\partial_n} & L_{n-1}TA' & \longrightarrow \cdots \\
 & \downarrow{\scriptstyle \varphi'_*} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_*} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi''_*} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi'_*} & \\
\cdots \longrightarrow & L_nTB' & \xrightarrow{i'_*} & L_nTB & \xrightarrow{\pi'_*} & L_nTB'' & \xrightarrow{\partial_n} & L_{n-1}TB' & \longrightarrow \cdots
\end{array}
$$

因此∂对 T 也是自然的.

定义 7 设 T, T', T''都是加法共变函子. $T' \xrightarrow{\tau'} T, T \xrightarrow{\tau} T''$都是函子间的自然变换.若对任意的 $P \in \mathrm{P}_R\mathfrak{M}$ 都有正合列

$$0 \longrightarrow T'P \xrightarrow{\tau'_P} TP \xrightarrow{\tau_P} T''P \longrightarrow 0$$

则称 T', T, T''**关于投射(模)正合**(exact on projectives).

我们可构作一个范畴 $\mathscr{C}$,使

$$\mathrm{Ob}\mathscr{C} = \{{}_R\mathfrak{M}\text{ 到某一范畴 }\mathscr{D}\text{ 的加法共变函子}\},$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(T, T'') = \{T \underset{\text{nat}}{\xrightarrow{\tau}} T''\}$$

此时$\forall A \in {}_R\mathfrak{M}$ 都是 $\mathscr{C}$ 到 $\mathscr{D}$ 的函子.

下面来证对应于上面定理 5 的下述结果.

定理 5′ 设 T', T, T''为关于投射正合的加法共变函子. $T_1 \xrightarrow{\tau'} T, T \xrightarrow{\tau} T''$为自然变换.则对任意的 $A \in {}_R\mathfrak{M}$,存在连接同态

$$\partial_n : L_nT''A \longrightarrow L_{n-1}T'A$$

使有长正合列

$$\cdots \to L_nT'A \longrightarrow L_nTA \longrightarrow L_nT''A \xrightarrow{\partial_n} L_{n-1}T'A \to \cdots \to$$

$$L_1T''A \xrightarrow{\partial_1} L_0T'A \longrightarrow L_0TA \longrightarrow L_0TA'' \longrightarrow 0$$

证 取 A 的删项投射分解$\mathbb{P}_{\hat{A}}$，由 T', T, T''关于投射正合知，必有复形正合列

$$0 \longrightarrow T'\mathbb{P}_{\hat{A}} \longrightarrow T\mathbb{P}_{\hat{A}} \longrightarrow T''\mathbb{P}_{\hat{A}} \longrightarrow 0$$

于是由上节(定理 3)的复形同调的长正合列定理即得欲证. □

对应于命题 3 有

命题 3′ 设 $f \in \mathrm{Hom}_R(A, A')$且

$$\begin{array}{ccccc} T' & \xrightarrow{\tau'} & T & \xrightarrow{\tau} & T'' \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi'} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi''} \\ S' & \xrightarrow{\sigma'} & S & \xrightarrow{\sigma} & S'' \end{array}$$

为加法共变函子关于自然变换的交换图，其中两行都是关于投射正合的，则有下列两个交换图：

$$\begin{array}{cccccccccc} \text{(i)}' \cdots \longrightarrow & L_nT'A & \longrightarrow & L_nTA & \longrightarrow & L_nT''A & \xrightarrow{\partial_n} & L_{n-1}T'A & \longrightarrow \cdots \\ & \downarrow{\scriptstyle f_*} & & \downarrow{\scriptstyle f_*} & & \downarrow{\scriptstyle f_*} & & \downarrow{\scriptstyle f_*} & \\ \cdots \longrightarrow & L_nT'A' & \longrightarrow & L_nTA' & \longrightarrow & L_nT''A' & \xrightarrow{\partial_n} & L_{n-1}T'A' & \longrightarrow \cdots \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
\text{(ii)}'\cdots \longrightarrow & L_nT'A & \longrightarrow & L_nTA & \longrightarrow & L_nT''A & \xrightarrow{\partial_n} & L_{n-1}T'A & \longrightarrow \cdots \\
& \downarrow \varphi'_* & & \downarrow \varphi_* & & \downarrow \varphi''_* & & \downarrow \varphi'_* & \\
\cdots \longrightarrow & L_nS'A & \longrightarrow & L_nSA & \longrightarrow & L_nS''A & \xrightarrow{\partial_n} & L_{n-1}S'A & \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

类似于上述的 L_nT，可得关于 R^nT 的相应结果(长正合列定理).

定理 5° ((右导出函子的)长正合列定理)设 T 为加法共变函子，

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$$

为$_R\mathfrak{M}$ 中的正合列，则有自然的连接同态∂^n 使有左正合的长正合列

$$0 \to R^0TA' \to R^0TA \to R^0TA'' \xrightarrow{\partial^0} R^1TA' \to R^1TA \to R^1TA''$$
$$\xrightarrow{\partial^1} \cdots \to R^nTA' \to R^nTA \to R^nTA'' \xrightarrow{\partial^n} R^{n+1}TA' \to \cdots$$

因此 R^0T 为左正合的.

如果 T 为反变的加法函子. 定理 5、定理 5°也有相应的形式. 作为例子，我们只写出右导出函子的下述结果.

定理 5′ 设 T 为加法反变函子，

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$$

为$_R\mathfrak{M}$ 中的正合列，则有自然的连接同态∂^n 使有左正合的长正合列

$$0 \to R^0TA'' \to R^0TA \to R^0TA' \xrightarrow{\partial^0} R^1TA'' \to R^1TA \to$$
$$R^1TA' \to \cdots \to R^nTA'' \to R^nTA \to R^nTA' \xrightarrow{\partial^n} R^{n+1}TA'' \to \cdots$$

因此 R^0T 为左正合的.

习 题 3.2

1. 证明：对加法共变函子 T 有如下结果：

(i) 若 $A\in P_R\mathfrak{M}$,则 $L_nT(A)=0,\forall n\geqslant1$;

(ii) 若 $A\in \mathrm{Inj}_R\mathfrak{M}$ 则 $R^nT(A)=0,\forall n\geqslant1$.

2. 设 T 为加法反变函子. 试用内射分解定义 L_nT,并检验相应于本节的一些结果是否成立.

§3　右导出函子 Ext 及其应用

上节中我们已定义了两种右导出函子 Ext 与$\overline{\mathrm{Ext}}$:

$$\mathrm{Ext}_R^n(A,B)=H_{-n}(\mathrm{Hom}_R(A,\mathbb{E}_{\hat{B}}))=H^n(\mathrm{Hom}_R(A,\mathbb{E}_{\hat{B}}))$$

$$\overline{\mathrm{Ext}}_R^n(A,B)=H_{-n}(\mathrm{Hom}_R(\mathbb{P}_{\hat{A}},B))=H^n(\mathrm{Hom}_R(\mathbb{P}_{\hat{A}},B))$$

在本节中我们将首先证明:这两种定义得到的右导出函子是一致的,今后即不再使用$\overline{\mathrm{Ext}}$记号.

在上节中已得出或由上节方法可看出如下结果:

(i) $\mathrm{Ext}_R^n(A,B)=\overline{\mathrm{Ext}}_R^n(A,B)=0,\forall A,B\in{}_R\mathfrak{M},n<0$,(注意$\mathbb{E}_B$ 可在左边补 0,$\mathbb{P}_A$ 可在右边补 0 即知);

(ii) $\mathrm{Ext}_R^0(A,-)\underset{\text{nat}}{\simeq}\mathrm{Hom}_R(A,-)$. 一般地,对共变左正合函子 T,$R^0T\underset{\text{nat}}{\simeq}T$;

(iii) $\overline{\mathrm{Ext}}_R^0(-,B)\underset{\text{nat}}{\simeq}\mathrm{Hom}_R(-,B)$. 一般地,对反变左正合函子 T,$R^0T\underset{\text{nat}}{\simeq}T$;

(iv) 设 $0\to A'\to A\to A''\to0$ 为${}_R\mathfrak{M}$ 中的正合列,$B\in{}_R\mathfrak{M}$,则有自然的连结同态∂组成长正合列

$$0\to\mathrm{Hom}_R(B,A')\to\mathrm{Hom}_R(B,A)\to\mathrm{Hom}_R(B,A'')\xrightarrow{\partial}\mathrm{Ext}_R^1(B,A')\to\cdots\to\mathrm{Ext}_R^{n-1}(B,A'')\xrightarrow{\partial}\mathrm{Ext}_R^n(B,A')\to\mathrm{Ext}_R^n(B,A)\to\mathrm{Ext}_R^n(B,A')\to\cdots;$$

$$0\to\mathrm{Hom}_R(A'',B)\to\mathrm{Hom}_R(A,B)\to\mathrm{Hom}_R(A',B)\xrightarrow{\partial}\overline{\mathrm{Ext}}_R^1(A'',B)\to\cdots\to\overline{\mathrm{Ext}}_R^{n-1}(A',B)\xrightarrow{\partial}\overline{\mathrm{Ext}}_R^n(A'',B)\to\overline{\mathrm{Ext}}_R^n(A,B)\to$$

$\overline{\mathrm{Ext}}_R^n(A',B)\to\cdots$;

(v) $B\in\mathrm{Inj}_R\mathfrak{M}$ 时 $\mathrm{Ext}_R^n(A,B)=0$, $\forall A\in{}_R\mathfrak{M}$, $n\geqslant1$; $A\in \mathrm{P}_R\mathfrak{M}$ 时 $\overline{\mathrm{Ext}}_R^n(A,B)=0$, $\forall B\in{}_R\mathfrak{M}$, $n\geqslant1$.

为证 $\mathrm{Ext}\simeq\overline{\mathrm{Ext}}$,先引进如下定义.

定义 1 设 $\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{C}$ 为范畴, $T:\mathscr{A}\times\mathscr{B}\to\mathscr{C}$ 满足:

(i) $T(A,-):\mathscr{B}\to\mathscr{C}$ 为共变(或反变)函子, $\forall A\in\mathrm{Ob}\mathscr{A}$, $T(-,B):\mathscr{A}\to\mathscr{C}$ 为共变(或反变)函子, $\forall B\in\mathrm{Ob}\mathscr{B}$;

(ii) $\forall f\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A,A')$, $g\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(B,B')$ 有交换图

$$\begin{array}{ccc} T(A,B) & \xrightarrow{T(A,-)g} & T(A,B') \\ {\scriptstyle T(-,B)f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T(-,B')f} \\ T(A',B) & \xrightarrow[T(A',-)g]{} & T(A',B') \end{array}$$

则称 T 为**双函子**(bifunctor).

显然有

命题 1 $-\underset{R}{\otimes}-$, $\mathrm{Hom}_R(-,-)$ 都是双函子(前者是 $\mathfrak{M}_R\times{}_R\mathfrak{M}$ 到$\mathbb{A}\mathrm{G}$,后者是${}_R\mathfrak{M}\times{}_R\mathfrak{M}$ 到$\mathbb{A}\mathrm{G}$ 的双函子).

现在来证明

定理 1 设 $A,B\in{}_R\mathfrak{M}$ 各有如下的投射分解与内射分解

$$\mathbb{P}_A=\cdots\to P_n\xrightarrow{d_n}P_{n-1}\to\cdots\to P_1\xrightarrow{d_1}P_0\xrightarrow{d_0}A\longrightarrow0$$

$$\mathbb{E}_B=0\longrightarrow B\longrightarrow E^0\xrightarrow{\sigma^0}E^1\to\cdots\to E^n\xrightarrow{\sigma^n}E^{n+1}\to\cdots$$

则

$$H^n(\mathrm{Hom}_R(\mathbb{P}_{\hat{A}},B))\simeq H^n(\mathrm{Hom}_R(A,\mathbb{E}_{\hat{B}}))$$

因此 $\mathrm{Ext}\simeq\overline{\mathrm{Ext}}$. 今后不再使用$\overline{\mathrm{Ext}}$记号.

证(A. Zaks) 记 $K_j=\mathrm{Ker}d_j$, $j=0,1,\cdots$, $L^j=\mathrm{Im}\sigma^{j-1}$, $j=1,2,\cdots$.

(i) 因为 Hom 为双函子,于是由短正合列

$$0 \longrightarrow K_0 \longrightarrow P_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow B \longrightarrow E^0 \longrightarrow L^1 \longrightarrow 0$$

用长正合列定理(定理 5°,定理 5″)即得下面行列正合的交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \mathrm{Ext}^1(A,E^0) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \| \; {\scriptstyle E^0\in \mathrm{Inj}_R\mathfrak{M}} \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(A,B) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(A,E^0) & \xrightarrow{\tau} & \mathrm{Hom}(A,L^1) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1(A,B) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(P_0,B) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(P_0,E^0) & \xrightarrow{\sigma} & \mathrm{Hom}(P_0,L^1) & \longrightarrow & 0 \quad (P_0\in \mathrm{P}_R\mathfrak{M}) \\
 & & \downarrow\alpha & & \downarrow\beta & ① & \downarrow\gamma & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(K_0,B) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(K_0,E^0) & \xrightarrow{\eta} & \mathrm{Hom}(K_0,L^1) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1(K_0,B) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \| \\
 & & \overline{\mathrm{Ext}}^1(A,B) & & 0 \; {\scriptstyle (E^0\in \mathrm{Inj}_R\mathfrak{M})} & & \overline{\mathrm{Ext}}^1(A,L^1) & & \mathrm{Ext}^1(K_0,E^0) \\
 & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\
 & & \overline{\mathrm{Ext}}^1(P_0,B)=0 \; {\scriptstyle (P_0\in \mathrm{P}_R\mathfrak{M})} & & & & 0=\overline{\mathrm{Ext}}^1(P_0,L^1) \; {\scriptstyle (P_0\in \mathrm{P}_R\mathfrak{M})} & &
\end{array} \tag{1}$$

用蛇引理(本章§1 定理 4)于上图之下两行得带正合行的下图

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{Ker}\beta & \longrightarrow & \mathrm{Ker}\gamma & \longrightarrow & \mathrm{Coker}\alpha & \longrightarrow & \mathrm{Coker}\beta \\
\simeq\downarrow & & \simeq\downarrow & & \simeq\downarrow & & \| \\
\mathrm{Hom}(A,E^0) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(A,L^1) & \longrightarrow & \overline{\mathrm{Ext}}^1(A,B) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

但由图(1)之上行知

$$\mathrm{Hom}(A,E^0) \xrightarrow[\tau]{} \mathrm{Hom}(A,L^1) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(A,B) \longrightarrow 0$$

故有

$$\mathrm{Ext}^1(A,B) \simeq \overline{\mathrm{Ext}}^1(A,B),\ \forall A,B\in {}_R\mathfrak{M} \tag{2}$$

(ii) 由图(1)之交换性知①可换,即 $\gamma\sigma=\eta\beta$. 由 σ,β 都是满同态知

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Coker}\gamma & = & \mathrm{Coker}\eta \\
\wr| & & \wr| \\
\overline{\mathrm{Ext}}^1(A,L^1) & \simeq & \mathrm{Ext}^1(K_0,B)
\end{array} \tag{3}$$

而由(2)知

$$\mathrm{Ext}^1(K_0,B)\simeq\overline{\mathrm{Ext}}^1(K_0,B)$$

从而有

$$\overline{\mathrm{Ext}}^1(A,L^1)\simeq\overline{\mathrm{Ext}}^1(K_0,B) \tag{4}$$

约定 $K_{-1}=A, L^0=B$,代替(i)中开头的两个正合列以更一般的正合列

$$0\longrightarrow K_j\longrightarrow P_j\longrightarrow K_{j-1}\longrightarrow 0$$
$$0\longrightarrow L^i\longrightarrow E^i\longrightarrow L^{i+1}\longrightarrow 0$$

由(4)即得

$$\overline{\mathrm{Ext}}^1(K_j,L^i)\simeq\overline{\mathrm{Ext}}^1(K_{j-1},L^{i+1}) \tag{5}$$

(iii) 由上证可得

$$\mathrm{Ext}^{n+1}(A,B)\underset{\substack{\text{上节}\\\text{命题2}'}}{\simeq}\mathrm{Ext}^1(A,L^n)\underset{(2)}{\simeq}\overline{\mathrm{Ext}}^1(A,L^n)\underset{(5)}{\simeq}$$
$$\overline{\mathrm{Ext}}^1(K_{n-1},B)\underset{\substack{\text{上节}\\\text{推论3}}}{\simeq}\overline{\mathrm{Ext}}^{n+1}(A,B),\quad \forall A,B\in{}_R\mathfrak{M}$$

□

上面证明中的(ii),事实上已给出如下结果.

推论 1 在定理 1 的记号下,

$\mathrm{Ext}_R^1(K_j,L^i)\simeq\mathrm{Ext}_R^1(K_{j-l},L^{i+l}),\quad i,j=0,1,\cdots l\leqslant j.$

再注意定理 1 证明中的关键是用"Hom 为左正合的双函子"及"$R^1\mathrm{Hom}(\mathrm{P}_R\mathfrak{M},—)=R^1\mathrm{Hom}(—,\mathrm{Inj}_R\mathfrak{M})=0$". 由于$\otimes$为右正合的双函子,且 $L^1(\mathrm{Flat}\ \mathfrak{M}_R\otimes—)=L^1(—\otimes\mathrm{Flat}_R\mathfrak{M})=0$(因此 $L^1(\mathrm{P}\mathfrak{M}_R\otimes—)=L^1(—\otimes\mathrm{P}_R\mathfrak{M})=0$),因此同法可得如下的关键性定理.

定理 2 设 $A\in\mathfrak{M}_R, B\in{}_R\mathfrak{M}$. $\mathbb{F}_{\hat{A}},\mathbb{F}_{\hat{B}}$ 各为 A,B 的删项平坦(或投射)分解所成的复形,则

$$H_n(\mathbb{F}_{\hat{A}}\underset{R}{\otimes}B)\simeq H_n(A\underset{R}{\otimes}\mathbb{F}_{\hat{B}}),\quad \forall n\geqslant 0$$

因此,Tor_n^R 关于两个变元(用平坦或投射分解)所得的定义在同构意义下是一致的且与平坦(投射)分解的选取无关.

下面再来介绍 Ext 的基本性质及应用. 先引进如下定义.

定义 2 ${}_R\mathfrak{M}$(或 $\mathfrak{M}_R$)中的正合列

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow E \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

称为 A 按 B 的一个**扩张**(extension). 如果这个正合列是可裂的, 则又称 A 按 B 的这个扩张是**可裂的**.

我们来证明下述结果.

定理 3 设

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} B \longrightarrow 0 \tag{6}$$

为${}_R\mathfrak{M}(\mathfrak{M}_R)$中 A 按 B 的扩张, 则

(i) $\mathrm{Ext}_R^1(B,A)=0 \Leftrightarrow A$ 按 B 的一切扩张都是可裂的;

(ii) $\mathrm{Ext}_R^1(B,A)=0, \forall A\in {}_R\mathfrak{M}(\mathfrak{M}_R) \Leftrightarrow B\in \mathrm{P}_R\mathfrak{M}(\mathrm{P}\mathfrak{M}_R)$;

(iii) $\mathrm{Ext}_R^1(B,A)=0, \forall B\in {}_R\mathfrak{M}(\mathfrak{M}_R) \Leftrightarrow A\in \mathrm{Inj}_R\mathfrak{M}(\mathrm{Inj}\mathfrak{M}_R)$.

证 (i) $\Rightarrow$: 以 $\mathrm{Hom}_R(-,A)$作用于 A 按 B 的任一扩张(6). 由长正合列定理有

$$\mathrm{Hom}_R(E,A)\xrightarrow{i^*}\mathrm{Hom}_R(A,A)\xrightarrow{\partial}\mathrm{Ext}_R^1(B,A)=0$$

由此知 i^* 为满同态. 于是有 $g\in\mathrm{Hom}_R(E,A)$使

$$I_A=i^*(g)=gi \quad .$$

因此 A 按 B 的任一扩张都可裂(见第一章 §4 定理 1 与定义 4)

$\Leftarrow$: 注意按本节下面定义 5 的定义, A 按 B 的一切可裂扩张(中间项都同构于 $A\oplus B$)都是等价的, 因此 A 按 B 的扩张只有一个等价类. 再由本节后文定理 13(那里证明了 $n=1$ 的情况)即知 $\mathrm{Ext}_R^1(B,A)$只有一个元素, 故 $\mathrm{Ext}_R^1(B,A)=0$.

(ii) 由(i)与投射模的特征性质(见第二章 §1 定理 1)以及第一章 §4 定理 1, 考察(7)即得证.

(iii) 由(i)与内射模的特征性质(见第二章 §2 定理 1)考察(7)即得证. □

下面将 Hom 与 $\prod, \coprod$ 的关系推广到 Ext.

定理 4 设 $A, A_j, B, B_j \in {}_R\mathfrak{M}(\mathfrak{M}_R), j \in J$，则

(i) $\mathrm{Ext}_R^n(\coprod_{j\in J} A_j, B) \simeq \prod_{j\in J} \mathrm{Ext}_R^n(A_j, B), \forall n \geqslant 0$;

(ii) $\mathrm{Ext}_R^n(A, \prod_{j\in J} B_j) \simeq \prod_{j\in J} \mathrm{Ext}_R^n(A, B_j), \forall n \geqslant 0$.

证 (i) 对 n 用数学归纳法. $n=0$ 时，由上节命题 1′知 $\mathrm{Ext}_R^0(M, N) \simeq \mathrm{Hom}_R(M, N), \forall M, N \in {}_R\mathfrak{M}$. 于是由第一章 §7 定理 4 知此时(i)成立.

$n>0$ 时考察正合列.

$$0 \longrightarrow K_j \longrightarrow P_j \longrightarrow A_j \longrightarrow 0$$

其中 $P_j \in P_R\mathfrak{M}$. 显然有正合列

$$0 \longrightarrow \coprod_{j\in J} K_j \longrightarrow \coprod_{j\in J} P_j \to \coprod_{j\in J} A_j \longrightarrow 0$$

且其中 $\coprod_{j\in J} P_j \in P_R\mathfrak{M}$. 于是由长正合列定理得如下的行正合交换图(下行为 $\prod_{j\in J}$ 作用于正合列得)：

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{Hom}(\coprod P_j, B) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\coprod K_j, B) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1(\coprod A_j, B) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1(\coprod P_j, B) = 0 \\
 & & & & & & \coprod P_j \in P_R\mathfrak{M} \\
\text{ch.1,§7,定理 4}\ \downarrow\simeq & & \text{ch.1,§7,定理 4}\ \downarrow\simeq & & \text{ch.1,§4,命题 1}\ \downarrow\simeq\ \text{(五引理)} & & \\
\prod \mathrm{Hom}(P_j, B) & \longrightarrow & \prod \mathrm{Hom}(K_j, B) & \longrightarrow & \prod \mathrm{Ext}^1(A_j, B) & \longrightarrow & \prod \mathrm{Ext}^1(P_j, B) = 0 \\
 & & & & & & P_j \in P_R\mathfrak{M}
\end{array}$$

由五引理(右端各加“0”)即得

$$\mathrm{Ext}_R^1(\coprod_{j\in J} A_j, B) \simeq \prod_{j\in J} \mathrm{Ext}_R^1(A_j, B).$$

递推之，注意上图中 Hom 改为 Ext^m，则 Ext^1 改为 Ext^{m+1}. 于是

(i) 对 m 成立时，对 $m+1$ 亦成立. 这就证出了(i).

(ii) 对偶于上述证明即得(ii). □

注意由 $\mathrm{Ext}_R^n(A, B)$ 的定义知，它是 $\mathrm{Hom}_R(P_n, B)$（P_n 为 A 的投射分解中出现的投射模）之二子模的商模，立得如下结果.

定理 5 (i) 设 R 为交换环，则 $\mathrm{Ext}_R^n(A, B) \in {}_R\mathfrak{M}, \forall A, B \in {}_R\mathfrak{M}$;

(ii) 一般地，$\mathrm{Ext}_R^n(A, B) \in {}_{C(R)}\mathfrak{M}, \forall A, B \in {}_R\mathfrak{M}$，其中 $C(R)$

表示 R 的中心所成的环.

下面给出 Abel 群的 Ext 的计算法.先证明如下结果.

定理 6　设 R 为无零因子交换环(即整环),$B\in{}_R\mathfrak{M}$,则

$$\mathrm{Ext}_R^1(R/mR,B)\simeq B/mR,\quad \forall\, 0\neq m\in R$$

因此对 Abel 群($\mathbb{Z}$－模)B 有

$$\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Z}/m\,\mathbb{Z},B)\simeq B/mB,\quad \forall\, 0\neq m\in\mathbb{Z}$$

证　显然有如下的 R－模正合列

$$0\longrightarrow R\xrightarrow{f_m}R\longrightarrow R/mR\longrightarrow 0$$
$$r\longmapsto mr$$

以 $\mathrm{Hom}_R(-,B)$ 作用并用长正合列定理得

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{Hom}_R(R,B) & \xrightarrow[g\,\mapsto\, mg]{f^*} & \mathrm{Hom}_R(R,B) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}_R^1(R/mR,B) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}_R^1(R,B)=0 \\
\wr\| & & \wr\| & & & & R\in P_R\mathfrak{M} \\
B & \xrightarrow[b\,\mapsto\, mb]{} & B & & & &
\end{array}$$

由此即知

$$\mathrm{Ext}_R^1(R/mR,B)\simeq B/mB$$ □

注意,若 A 为有限生成 Abel 群,则

$$A\simeq\Big(\coprod_{<\infty}\mathbb{Z}/m_j\,\mathbb{Z}\Big)\amalg\mathbb{Z}^n,\quad m_j\neq 0$$

于是由有限直和与有限直积的同构性由定理 4、定理 6 立得

推论 2　设有限生成 Abel 群

$$A\simeq\Big(\coprod_{j=1}^{k}\mathbb{Z}/m_j\,\mathbb{Z}\Big)\amalg\mathbb{Z}^n,\quad m_j\neq 0$$

B 为任一 Abel 群,则

$$\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(A,B)\simeq\coprod_{j=1}^{k}B/m_jB$$

定理 7　设 $R\in\mathrm{LPID}$(即 R 无零因子,且一切左理想都是左主理想,比如$\mathbb{Z}$ 即是),$A,B\in{}_R\mathfrak{M}$,则

$$\mathrm{Ext}_R^n(A,B)=0,\quad \forall\, n>1$$

因此,若 A,B 为任意 Abel 群,则

$$\mathrm{Ext}_{\mathbf{Z}}^{n}(A,B)=0,\ \forall\, n>1$$

证 (i) 先证:对 R∈LPID,一切自由左 R-模的非零子模仍为自由模.

设 $F=\coprod\limits_{j\in\Lambda}Rx_j\in\mathrm{Free}_R\mathfrak{M}$,且 Λ 已被良序(任何集合都可良序!),$S\neq0$ 为 F 的左 R-子模.我们取

$$F_\lambda=\coprod_{j\leqslant\lambda}Rx_j\in\mathrm{Free}_R\mathfrak{M},\ F'_\lambda=\coprod_{j<\lambda}Rx_j\in\mathrm{Free}_R\mathfrak{M},$$

$$S_\lambda=S\cap F_\lambda.$$

则 $\lambda_1<\lambda_2$ 时 $F_{\lambda_1}\subseteq F'_{\lambda_2}\subset F_{\lambda_2}$,$S_{\lambda_1}\subseteq S_{\lambda_2}$.下面用超限归纳法证明:$\forall\,0\neq S_\lambda$ 都是自由左 R-模且 S_λ 有基 Y_λ 使 $\lambda_1\leqslant\lambda_2$ 时 $Y_{\lambda_1}\subseteq Y_{\lambda_2}$.

$\lambda=1$ 时 $S_1=S\cap F_1$.若 $S_1\neq0$,则由 $R\in$ LPID 即可知 $S_1\in\mathrm{Free}_R\mathfrak{M}$.

设 $\lambda>1$ 且对一切 $\mu<\lambda$,$S_\mu\in\mathrm{Free}_R\mathfrak{M}$ 且 S_μ 有基 Y_μ 使 $\lambda_1\leqslant\lambda_2$ 时 $Y_{\lambda_1}\subseteq Y_{\lambda_2}$,来证 S_λ 也满足这些条件.为此取

$$S'_\lambda=\bigcup_{\mu<\lambda}S_\mu\subseteq F'_\lambda$$

由归纳假设知 $S'_\lambda\neq0$ 时必自由,且有基 $Y'_\lambda=\bigcup\limits_{\mu<\lambda}Y_\mu$.

若 $S_\lambda=S'_\lambda$,则已证出欲证结论.若 $S_\lambda\neq S'_\lambda$,则有 $s\in S_\lambda\setminus S'_\lambda$ 使 $s=u+v$,$u\in F'_\lambda$,$v=rx_\lambda\neq0$,令

$$I=<\{r\mid s\in S_\lambda\setminus S'_\lambda,s=u+v,u\in F'_\lambda,v=rx_\lambda\}>\mathop{\lhd}_{l}R,$$

则由 $R\in$ LPID 知,必有 $a_\lambda\in R$ 使 $I=\langle a_\lambda\rangle=Ra_\lambda$ 为左主理想.由此知有 $y_\lambda=u_\lambda+a_\lambda x_\lambda\in S_\lambda$ 使对任意的 $y\in S_\lambda$,

$$y=u+ba_\lambda x_\lambda,\quad b\in R$$

于是

$$y=(u-bu_\lambda)+by_\lambda,\quad u-bu_\lambda\in S_\lambda\subseteq S$$

又由上知,$u-bu_\lambda\in F'_\lambda$ 必为 $\{x_\mu\mid\mu<\lambda\}$ 中有限个元素的 R-线性组合.因此必有 F_μ,$\mu<\lambda$ 使 $u-bu_\lambda\in F_\mu$.故

$$u - bu_\lambda \in S \cap F_\mu = S_\mu \subseteq S'_\lambda$$

由此得

$$S_\lambda = S'_\lambda \oplus Ry_\lambda \in \mathrm{Free}_R\mathfrak{M}(\text{以 } Y'_\lambda \cup \{y_\lambda\} \text{为基}).$$

于是 $S = \bigcup S_\lambda$ 是以 $Y = \bigcup Y_\lambda$ 为基的自由 R - 模.

(ii) 对以 $P_0 \in \mathrm{P}_R\mathfrak{M}$ 为中间项的 $_R\mathfrak{M}$ 正合列

$$0 \longrightarrow K_0 \longrightarrow P_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

由于 K_0 同构于 P_0 的一个子模,因而同构于一个自由模的子模,于是由上段所证知 $K_0 \in \mathrm{Free}_R\mathfrak{M} \subset \mathrm{P}_R\mathfrak{M}$. 故由长正合列定理得正合列($\forall n > 1$).

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Ext}_R^{n-1}(K_0,B) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}_R^n(A,B) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}_R^n(P_0,B) \\ \| \ K_0 \in \mathrm{P}_R\mathfrak{M} & & & & \| \ P_0 \in \mathrm{P}_R\mathfrak{M} \\ 0 & & & & 0 \end{array}$$

由此即得 $\mathrm{Ext}_R^n(A,B) = 0, \forall n > 1$. □

上述证明中的(i)已给出如下结果.

命题 2　设 $R \in \mathrm{LPID}$(比如 $R = \mathbb{Z}$,更一般地 $R \in \mathrm{PID}$),则自由左 R - 模的子模必为自由模,因而

$$\mathrm{P}_R\mathfrak{M} = \mathrm{Free}_R\mathfrak{M}$$

由推论 2 与定理 7 立得如下结果.

定理 8　设有限生成 Abel 群

$$A = \left(\coprod_{j=1}^{k} \mathbb{Z}/m_j\mathbb{Z}\right) \amalg \mathbb{Z}^m,$$

B 为任一 Abel 群,则

$$\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^n(A,B) = \begin{cases} \coprod_{j=1}^{k} B/m_jB, & n = 1 \text{ 时} \\ 0 \quad , & n > 1 \text{ 时} \end{cases}$$

这就完全解决了有限生成 Abel 群的 Ext 计算问题.

由定理 7 证明中的(ii)可以看出,对 $\mathrm{lpD}(R) \leqslant 1$ 的环 R(投射左 R - 模的子模仍为投射模的环)定理 7 仍成立. 可预想到 Ext 与 lpD 之间必有密切关系. 为介绍这方面的主要结果,先作如下定

义.

定义 3 在 $A \in {}_R\mathfrak{M}(\mathfrak{M}_R)$ 的投射分解

$$\mathbb{P}_A = \cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} A \longrightarrow 0$$

中, $K_n = \mathrm{Ker} d_n$, $n \geqslant 0$, 称为 A 的第 n 个**合冲**(syzygy).

定义 4 设 $A, B \in {}_R\mathfrak{M}$. 若有 $P_1, Q_1 \in \mathrm{P}_R\mathfrak{M}$ 使

$$A \oplus P_1 \simeq B \oplus Q_1$$

则称 A, B 为**投射等价的**(projectively equivalent), 记为 $A \overset{P}{\sim} B$.

不难看出, 这是${}_R\mathfrak{M}$ 上比同构更广义的一种等价关系. 上章 §1 中的 Schanuel 引理事实上是说: 任一个 R-模的一切投射分解的第 0 个合冲都是投射等价的. 我们现在来证更一般的结果.

定理 9 设$\{K_n\}$, $\{K'_n\}$为 $A \in {}_R\mathfrak{M}$ 的两组合冲, 则

(i) $K_n \overset{P}{\sim} K'_n$, $\forall n \geqslant 0$;

(ii) $\mathrm{Ext}_R^1(K_n, B) \simeq \mathrm{Ext}_R^1(K'_n, B)$, $\forall B \in {}_R\mathfrak{M}$, $n \geqslant 0$;

(iii) $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(A, B) \simeq \mathrm{Ext}_R^1(K_{n-1}, B)$, $\forall B \in {}_R\mathfrak{M}$, $n \geqslant 1$.

证 (i) 由 Schanuel 引理的推广形式(上章 §2 命题 5)即得.

(ii) 注意 $\mathrm{Ext}_R^1(P, -) = 0$, $\forall P \in \mathrm{P}_R\mathfrak{M}$(定理 3)以及定理 4 (i), 用本定理的(i)即得.

(iii) 由上节推论 3, 注意 $\mathrm{Ext} \simeq \overline{\mathrm{Ext}}$即得. □

在今后我们将经常使用同调代数的一个基本方法——**维数转移法**(dimension shifting), 即用一个中间项为特殊模(如投射模、平坦模或内射模)的短正合列通过相应的长正合列作递归的推证或计算的方法. 以下述引理 1 的证明为例, 读者可看出此法的简捷性与程序性.

引理 1 设

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow P \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

为${}_R\mathfrak{M}$ 中的正合列, 其中 $P \in \mathrm{P}_R\mathfrak{M}$, 则

$$\mathrm{Ext}_R^n(A,M)\simeq\mathrm{Ext}_R^{n+1}(B,M),\quad \forall\, n\geqslant 1, M\in {}_R\mathfrak{M}$$

证 用维数转移法. 对短正合列

$$0\longrightarrow A\longrightarrow P\longrightarrow B\longrightarrow 0$$

用长正合列定理得正合列(只写要用的一段)

$$\begin{array}{ccccccc}\mathrm{Ext}_R^n(P,M) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}_R^n(A,M) & \xrightarrow{\partial^n} & \mathrm{Ext}_R^{n+1}(B,M) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}_R^{n+1}(P,M)\\ \| \; P\in \mathrm{P}_R\mathfrak{M} & & & & & & \|\\ 0 & & & & & & 0\end{array}$$

故得 $\mathrm{Ext}_R^n(A,M)\simeq\mathrm{Ext}_R^{n+1}(B,M)$. □

定理 10 设 $0\neq A\in {}_R\mathfrak{M}$, $n\geqslant 0$, 则下述各点是等价的:

(i) $\mathrm{lpd}(A)\leqslant n$(即, A 的任何投射分解都有投射的第 $n-1$ 个合冲);

(ii) $\mathrm{Ext}_R^{n+j}(A,M)=0$, $\forall\, j\geqslant 1, M\in {}_R\mathfrak{M}$;

(iii) $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(A,M)=0$, $\forall\, M\in {}_R\mathfrak{M}$;

(iv) $\inf\{m\mid \mathrm{Ext}_R^{m+1}(A,C)=0, \forall\, C\in {}_R\mathfrak{M}\}\leqslant n$;

(v) $\mathrm{Ext}_R^n(A,-)$ 为右正合共变函子. 即对 ${}_R\mathfrak{M}$ 中任意的正合列 $0\to M\to L\to K\to 0$, 必有正合列

$$\mathrm{Ext}_R^n(A,M)\longrightarrow\mathrm{Ext}_R^n(A,L)\longrightarrow\mathrm{Ext}_R^n(A,K)\longrightarrow 0$$

证 (i)⇒(ii): 对正合列 $0\to K_0\to P_0\to A\to 0$ $(P_0\in \mathrm{P}_R\mathfrak{M})$ 用引理 1 知,

$$\mathrm{Ext}_R^{n+j-1}(K_0,M)\simeq\mathrm{Ext}_R^{n+j}(A,M)$$

再对正合列 $0\to K_1\to P_1\to K_0\to 0$ $(P_1\in \mathrm{P}_R\mathfrak{M})$ 用引理 1 又得

$$\mathrm{Ext}_R^{n+j-1}(K_0,M)\simeq\mathrm{Ext}_R^{n+j-2}(K_1,M)$$

……, 依此类推, 知

$$\mathrm{Ext}_R^{n+j}(A,M)\simeq\mathrm{Ext}_R^{n+j-1}(K_0,M)\simeq\cdots\simeq\mathrm{Ext}_R^{j}(K_{n-1},M)$$

其中 K_{n-1} 为 A 的第 $n-1$ 个合冲. 由上章 §2 定理 7 知 $K_{n-1}\in \mathrm{P}_R\mathfrak{M}$, 于是 $\mathrm{Ext}_R^j(K_{n-1},M)=0$, 因此

$$\mathrm{Ext}_R^{n+j}(A,M)=0,\quad \forall\, j\geqslant 1, M\in {}_R\mathfrak{M}$$

(注意: 用定理 9(iii)证"(i)⇒(ii)"更简, 但知道上证中的分解过程

是有益的).

(ii)⇒(iii)是当然的.

(iii)⇒(iv)也是显见的.

(iv)⇒(i):令$\{K_n\}$为 A 的一组合冲,则

$$
\begin{aligned}
\text{(iv)} &\Leftrightarrow \inf\{m \mid \mathrm{Ext}_R^1(K_{m-1},C)=0,\ \forall C\in {}_R\mathfrak{M}\}\leqslant n \\
&\overset{\mathrm{Ext}_R^{m+1}(A,C)\simeq \mathrm{Ext}_R^1(K_{m-1},C)}{} \\
&\underset{\text{长正合列定理}}{\Longleftrightarrow} \inf\{m \mid \mathrm{Hom}_R(K_{m-1},-)\text{正合}\}\leqslant n \\
&\Leftrightarrow \inf\{m \mid K_{m-1}\in P_R\mathfrak{M}\}\leqslant n \\
&\Rightarrow \text{(i)}
\end{aligned}
$$

(v)⇔(iii):对正合列 $0\to M\to L\to K\to 0$ 用维数转移法.由长正合列

$$\mathrm{Ext}_R^n(A,M)\longrightarrow \mathrm{Ext}_R^n(A,L)\longrightarrow \mathrm{Ext}_R^n(A,K)\xrightarrow{\partial^n}\mathrm{Ext}_R^{n+1}(A,M)$$

则知(v)成立$\Leftrightarrow \mathrm{Ext}_R^{n+1}(A,M)=0,\ \forall M\in {}_R\mathfrak{M}$. □

由定理 10 又得 $\mathrm{lpd}(A)$的另一种定义法.因为我们有下述推论.

推论 3 设 $A\in {}_R\mathfrak{M}$,则

$$
\begin{aligned}
\mathrm{lpd}(A) &= \inf\{m \mid \mathrm{Ext}_R^{m+1}(A,-)=0\} \\
&= \inf\{m \mid \mathrm{Ext}_R^{m+j}(A,-)=0,\ \forall j\geqslant 1\}
\end{aligned}
$$

注 1 只对两个 R-模 A,B,一般地

$$\mathrm{Ext}_R^{n+1}(A,B)=0 \ \substack{\Rightarrow\!\!\!\!\!/ \\ \Leftarrow\!\!\!\!\!/}\ \mathrm{Ext}_R^n(A,B)=0$$

推论 4 设 $P\in P_R\mathfrak{M}$,且 $0\to A\to P\to B\to 0$ 正合,则

$$\mathrm{lpd}(B)\leqslant \mathrm{lpd}(A)+1$$

推论 5 设 $A_j\in {}_R\mathfrak{M},\ j\in J$,则

$$\mathrm{lpd}\Big(\coprod_{j\in J}A_j\Big)=\sup_{j\in J}\mathrm{lpd}(A_j)$$

证 由本定理与定理 4(i)即得. □

对偶于上段,我们给出如下定义与结果.

定义 3° 在 $A\in {}_R\mathfrak{M}(\mathfrak{M}_R)$的内射分解

$$\mathbb{E}_A = 0 \longrightarrow A \longrightarrow E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \to \cdots \to E^n \xrightarrow{d^n} E^{n+1} \to \cdots$$

中,称 $L^n = \mathrm{Im} d^{n-1}$, $n \geqslant 0$,为 A 的第 n 个上合冲(cosyzygy).

定义 4° 设 $A, B \in {}_R\mathfrak{M}$,若有 $E_1, E_2 \in \mathrm{Inj}_R\mathfrak{M}$ 使

$$A \oplus E_1 \simeq B \oplus E_2,$$

则称 A, B 为**内射等价的**,记为 $A \overset{E}{\sim} B$.

显然这也是${}_R\mathfrak{M}$ 上的一个等价关系,可对偶于上段证明得到如下结果.

定理 9° 设$\{L^n\}$, $\{\overline{L}^n\}$为 $B \in {}_R\mathfrak{M}$ 的两组上合冲,则

(i) $L^n \overset{E}{\sim} \overline{L}^n$;

(ii) $\mathrm{Ext}_R^1(A, L^n) \simeq \mathrm{Ext}_R^1(A, \overline{L}^n)$, $\forall A \in {}_R\mathfrak{M}$;

(iii) $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(A, B) \simeq \mathrm{Ext}_R^1(A, L^n)$, $\forall A \in {}_R\mathfrak{M}$.

定理 10° 设 $0 \neq A \in {}_R\mathfrak{M}$, $n \geqslant 0$,则下述各点是等价的:

(i) $\mathrm{lid}(A) \leqslant n$(即 A 的任何内射分解都有内射的第 n 个上合冲);

(ii) $\mathrm{Ext}_R^{n+j}(M, A) = 0$, $\forall j \geqslant 1$, $M \in {}_R\mathfrak{M}$;

(iii) $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(M, A) = 0$, $\forall M \in {}_R\mathfrak{M}$;

(iv) $\inf\{m \mid \mathrm{Ext}_R^{m+1}(C, A) = 0, \forall C \in {}_R\mathfrak{M}\} \leqslant n$;

(v) $\mathrm{Ext}_R^n(-, A)$为右正合反变函子.

推论 3° 设 $A \in {}_R\mathfrak{M}$,则

$$\begin{aligned}\mathrm{lid}(A) &= \inf\{m \mid \mathrm{Ext}_R^{m+1}(-, A) = 0\} \\ &= \inf\{m \mid \mathrm{Ext}_R^{m+j}(-, A) = 0, \forall j \geqslant 1\}.\end{aligned}$$

此外,由 $\mathrm{lpD}(R)$, $\mathrm{liD}(R)$的定义,从上述结果可以看出如下推论成立.

推论 6 $\mathrm{lpD}(R) \leqslant n \Leftrightarrow \mathrm{Ext}_R^{n+1}(A, B) = 0$, $\forall A, B \in {}_R\mathfrak{M}$.

推论 6° $\mathrm{liD}(R) \leqslant n \Leftrightarrow \mathrm{Ext}_R^{n+1}(A, B) = 0$, $\forall A, B \in {}_R\mathfrak{M}$.

从这两个推论我们立得如下的重要定理.

定理 11 对任意环 R,

$$\mathrm{lpD}(R)=\mathrm{liD}(R)$$

今后统一地记为 $\mathrm{lD}(R)$或 $\mathrm{lgD}(R)$，一般地不再使用 $\mathrm{lpD}(R)$ 与 $\mathrm{liD}(R)$. 上面 $\mathrm{lgD}(R)$中的"g"表示 global(整体)，因此又称为左整体维数.

对 $\mathrm{rpD}(R)$与 $\mathrm{riD}(R)$也有与上平行的结果. 因此统一地记为 $\mathrm{rD}(R)$或 $\mathrm{rgD}(R)$. 这里需注意的是，正如我们在上章§2 已讲过的那样，一般地，$\mathrm{rD}(R)\neq\mathrm{lD}(R)$.

现在我们给出简化 $\mathrm{lD}(R)$计算的一个方法. 为此先给出一条引理.

引理 2 $B\in\mathrm{Inj}_R\mathfrak{M}\Leftrightarrow\mathrm{Ext}_R^1(R/I,B)=0,\ \forall I\triangleleft_l R$.

证 $\forall I\triangleleft_l R$，由$_R\mathfrak{M}$ 中正合列

$$0\longrightarrow I\xrightarrow{\ i\ }R\longrightarrow R/I\longrightarrow 0$$

以 $\mathrm{Hom}_R(-,B)$作用后得长正合列

$$\mathrm{Hom}_R(R,B)\xrightarrow{i^*}\mathrm{Hom}_R(I,B)\xrightarrow{\partial^*}\mathrm{Ext}_R^1(R/I,B)\longrightarrow\underset{\substack{\|\\0}}{\mathrm{Ext}_R^1(R,B)}$$

注意 i^* 满$\Leftrightarrow B\in\mathrm{Inj}_R\mathfrak{M}$. 但由上正合列又知 i^* 满$\Leftrightarrow\mathrm{Ext}_R^1(R/I,B)=0,\ \forall I\triangleleft_l R$. 由此即得欲证. □

注 2 可以证明，当 R 为交换 Noether 环时，$B\in\mathrm{Inj}_R\mathfrak{M}\Leftrightarrow\mathrm{Ext}_R^1(R/P,B)=0,\ \forall P\in\mathrm{Spec}R$($R$ 的素理想集). 若 $\mathscr{F}$为 R 的左理想的一个集合，使得若 $\mathrm{Ext}_R^1(R/I,B)=0,\ \forall I\in\mathscr{F}$，则 $B\in\mathrm{Inj}_R\mathfrak{M}$. 这时就称 $\mathscr{F}$为 R－模的一个内射检验集(test set). 于是对交换 Noether 环，$\mathscr{F}=\mathrm{Spec}R$ 就是一个内射检验集. 而且可以证明：若$|\mathscr{F}|<\infty$，则$|\mathrm{Spec}R|<\infty$. 当 R 又无零因子且 $\mathrm{gD}(R)<\infty$时，若 $0\in\mathscr{F}\subset\mathrm{Spec}R$，$\mathscr{F}$为内射检验集，则 $\mathscr{F}=\mathrm{Spec}R$. 这等于告诉我们：对无零因子且整体维数有限的交换 Noether 环 R，$\mathrm{Spec}R$ 为最小的内射检验集. P. Vámos 在[V,83]中证明了：对交换 Noether 环，若 $\mathscr{F}\subset\mathrm{Spec}R$，则 $\mathscr{F}$为内射检验集的充要条件是 $\mathscr{F}\supseteq\mathrm{Spec}^*R\equiv$

$\{P\in\mathrm{Spec}R\mid R$ 在 P 的局部化 R_P 不是域$\}$. 类似地, 若对于 $\mathrm{Tor}_1^R(F,R/I)=0,\ \forall I\in\mathscr{F}$(左理想的一个集合), 必有 $F\in\mathrm{Flat}\mathfrak{M}_R$, 则称 $\mathscr{F}$ 为一个平坦检验集. 取示性模 (见上章 § 3)$F^{\circledast}=\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(F,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, P. Vámos 在[V,83]中对交换 Noether 环, $\mathscr{F}\subset\mathrm{Spec}R$, 也证出 $\mathscr{F}$ 为平坦检验集的充分必要条件为 $\mathscr{F}\supseteq\mathrm{Spec}^*R$. 1987 年 J. A. Beachy 与 W. D. Weakley 在[BW,87]中对内射检验集又得到更一般的结果.

由引理 2 我们可得化简 $\mathrm{lD}(R)$ 计算的如下重要结果.

定理 12(M. Auslander, 1955) 对任意环 R,

$$\mathrm{lD}(R)=\sup_{\forall I\lhd_l R}\mathrm{lpd}(R/I)=\sup_{\forall N=Rx}\mathrm{lpd}(N)$$

因此

$$\mathrm{lD}(R)=\sup_{\forall M\in \mathrm{f.g.}\,_R\mathfrak{M}}\mathrm{lpd}(M)$$

证 先证第一个等号. 设 $\sup\mathrm{lpd}(R/I)=\infty$. 当然 $\mathrm{lD}(R)=\infty$ 此时第一等号当然成立. 设 $\sup\mathrm{lpd}(R/I)\leqslant n<\infty$, 则

$$\mathrm{Ext}_R^{n+1}(R/I,B)=0,\quad \forall B\in{}_R\mathfrak{M}, I\lhd_l R$$
$$\wr\|$$
$$\mathrm{Ext}_R^1(R/I,L^n),\text{其中 } L^n \text{ 为} B \text{ 的第} n \text{ 个上合冲}.$$

由引理 2 知 $L^n\in\mathrm{Inj}_R\mathfrak{M}$. 因此由定理 10° 知 $\mathrm{lid}(B)\leqslant n$, $\forall B\in{}_R\mathfrak{M}$. 再由定理 11 即知第一等号成立.

再证第二等号. 注意 $N=Rx$ 时取 $I=\mathrm{lAnn}_R(x)$, 则 $I\lhd_l R$, $N\simeq R/I$. 由上证即知第二等号成立. □

关于 $\mathrm{lpd}(R/I)$的计算可归为计算 $\mathrm{lpd}(I)$. 事实上, 我们有下述推论.

推论 7 设 $\mathrm{lD}(R)\geqslant1$, 则

$$\mathrm{lD}(R)=\sup_{\forall I\lhd_l R}\mathrm{lpd}(I)+1$$

证 $\mathrm{lD}(R)\geqslant1$ 即 $\mathrm{lD}(R)>0$. 从$_R\mathfrak{M}$ 中的短正合列(注意 $R\in\mathrm{P}_R\mathfrak{M}$)

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow R \longrightarrow R/I \longrightarrow 0$$

知，若

$$\cdots \longrightarrow P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow I \longrightarrow 0$$

为 I 的投射分解，则

$$\cdots \longrightarrow P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow R \longrightarrow R/I \longrightarrow 0$$

为 R/I 的投射分解. 于是由定理 12 即得证. □

推论 8 设 $I \underset{l}{\lhd} R$，则

$$\mathrm{lpd}(R/I) = \begin{cases} \mathrm{lpd}(I)+1, & I \notin \mathrm{P}_R\mathfrak{M} \text{ 时} \\ \leqslant 1, & I \in \mathrm{P}_R\mathfrak{M} \text{ 时} \end{cases}$$

因此，$\mathrm{lD}(R) \leqslant 1 \Leftrightarrow R$ 的一切左理想 I 都是投射的(即 R 为左遗传环的充分必要条件是 R 的一切左理想都是投射的).

证 由 $_R\mathfrak{M}$ 中正合列

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow R \longrightarrow R/I \longrightarrow 0$$

得

$$\mathrm{Ext}_R^{n+1}(R/I, M) \simeq \mathrm{Ext}_R^n(I, M), \forall M \in {}_R\mathfrak{M}$$

由此即可得证. □

下面我们介绍不用投射分解与内射分解而用扩张的方法以及公理化的方法来定义 Ext 的有关知识. 初次阅读本书的读者可跳过或粗粗一看本节的这一部分内容.

定义 5 设在 $_R\mathfrak{M}$ 中，

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow E_j \longrightarrow B \longrightarrow 0, \quad j=1,2$$

均为 A 按 B 的扩张，且有同态 $\varphi: E_1 \to E_2$ 使成交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & E_1 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle I_A} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \downarrow{\scriptstyle I_B} & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & E_2 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0 \end{array} \qquad (7)$$

则称这两个扩张是**等价的**，记为 $E_1 \sim E_2$.

由三引理(第一章§4 推论 2)立得如下命题.

命题 3　等价扩张定义中的 φ 必为同构. 因此，等价扩张是一种等价关系.

注 3　φ 为同构 $\not\Rightarrow$ (7)中的两个扩张等价. 这是因为 φ 为同构时未必能使(7)为交换图. 见下例即明.

例 1　取 $R=\mathbb{Z}$，$A=B=\mathbb{Z}_p$，p 为奇素数. 记 $A=(a)$，$E=(x)\simeq\mathbb{Z}_{p^2}$，$B=(b)$. 定义

$$i_1: A \rightarrowtail E \text{ 使 } i_1(a)=px$$

$$i_2: A \rightarrowtail E \text{ 使 } i_2(a)=2px$$

$$\beta: E \longrightarrow E \text{ 使 } \beta(x)=2x$$

$$\pi_1: E \twoheadrightarrow B \text{ 使 } \pi_1(x)=b$$

$$\pi_2: E \twoheadrightarrow B \text{ 使 } \pi_2(x)=2b$$

则有四个 A 按 B 的扩张：

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i_j} E \xrightarrow{\pi_l} B \longrightarrow 0, \quad j,l=1,2$$

β 虽为同构但图

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i_1} & E & \xrightarrow{\pi_1} & B & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle I_A} & & \downarrow{\scriptstyle \beta}\,\simeq & & \downarrow{\scriptstyle I_B} & & \\
0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow[i_1]{} & E & \xrightarrow[\pi_2]{} & B & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

并非交换图且不可能找到其他的同构 β 使它为交换图. 因此上、下两行的扩张不是等价的.

上述扩张称为 1－扩张. 将此推广即得所谓的 n－扩张的概念.

定义 6　设 $A,B\in{}_R\mathfrak{M}$，则正合列

$$E: 0 \longrightarrow A \longrightarrow E_n \longrightarrow E_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow E_1 \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

称为 A 按 B 的一个 **n－扩张**(n－extension).

例如 B 的投射分解$\mathbb{P}_B$ 给出 K_{n-1}(第 $n-1$ 个合冲)按 B 的 $n-$扩张;B 的内射分解$\mathbb{E}_B$ 给出 B 按 L^n(第 n 个上合冲)的 $n-$扩张.

若对 A 按 B 的两个 $n-$扩张有 $\varphi_j:E_j\longrightarrow E'_j$ 使下图为交换图:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
E: 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & E_n & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & E_1 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0 \\
 & & \Big\downarrow {\scriptstyle I_A} & & \Big\downarrow {\scriptstyle \varphi_n} & & & & \Big\downarrow {\scriptstyle \varphi_1} & & \Big\downarrow {\scriptstyle I_B} & & \\
E': 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & E'_n & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & E'_1 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

则称这两个 $n-$扩张有关系 $E\curvearrowright E'$.

注 4 $n\geqslant 2$ 时 $E\curvearrowright E'\not\Rightarrow E'\curvearrowright E$. 因此,“$\curvearrowright$”不是等价关系.

定义 7 若 E,E'都是A 按B 的两个$n-$扩张且有一个具有“$\curvearrowright$”的有限长的 $n-$扩张链

$$E=E_0\curvearrowright E_1\curvearrowleft E_2\curvearrowright \cdots \curvearrowleft E_k=E'$$

其中每一个 E_j 处两边的箭头方向都相反(要进都进,要出都出),$0<j<k$,则称 E,E'是**等价的**$n-$**扩张**,记为 $E\sim E'$.

显然有

命题 4 对 A 按B 的$n-$扩张,“$\sim$”是一个等价关系.

记$[E]$为 A 按B 的含$n-$扩张 E 的等价类,并记

$$\mathrm{Yext}_R^n(B,A)=\{[E]\}$$

(“Y”是为纪念日本数学家米田信夫(N. Yoneda, 1930—)1954 年—1960 年期间开创 $n-$扩张理论的功绩).

可以证明

定理 13 对任意的 $n\geqslant 1$ 有一一对应

$$\psi_n:\mathrm{Yext}_R^n(B,A)\longrightarrow \mathrm{Ext}_R^n(B,A),\quad \forall A,B\in {}_R\mathfrak{M}$$

这个结果充分地说明了“Ext”记号的“扩张”含意.

下面只证 $n=1$ 的情况.

我们用 B 的投射分解来找出集映射

$$\psi=\psi_1:\mathrm{Yext}_R^1(B,A)\longrightarrow \mathrm{Ext}_R^1(B,A)$$

再证 ψ 为满单的即可.

设

$$E:0\longrightarrow A\longrightarrow E\longrightarrow B\longrightarrow 0$$

为 A 按 B 的扩张. 取 B 的投射分解

$$\mathbb{P}_B:\cdots\longrightarrow P_2\xrightarrow{d_2}P_1\xrightarrow{d_1}P_0\xrightarrow{d_0}B\longrightarrow 0$$

由比较定理(本章 §2 定理 1)可得行正合交换图(其中虚箭头, 特别是 α, 是同伦意义下唯一的).

$$\begin{array}{ccccccccc}
P_2 & \xrightarrow{d_2} & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0\\
{\scriptstyle 0}\downarrow & ① & {\scriptstyle \alpha}\downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle I_B} & & \\
0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & E & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

此时

$$\mathrm{Ext}_R^1(B,A)=\mathrm{Ker}d_2^*/\mathrm{Im}d_1^*,\quad d_j^*=\mathrm{Hom}_R(-,A)(d_j)$$

由①交换知 $d_2^*(\alpha)=\alpha d_2=0$, 因此 $\alpha\in\mathrm{Ker}d_2^*$. 又由 α 的同伦唯一性知, 若 $\alpha':P_1\longrightarrow A$ 也使上图交换, 则有 s_0,s_1 使

$$\alpha-\alpha'=0\cdot s_1+s_0d_1=s_0d_1=d_1^*(s_0)$$

$$\begin{array}{ccccc}
P_2 & \xrightarrow{d_2} & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0\\
 & \swarrow{\scriptstyle s_1=0} & \downarrow{\scriptstyle \alpha-\alpha'} & \swarrow{\scriptstyle s_0} & \\
0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & E
\end{array}$$

于是 $\alpha-\alpha'\in\mathrm{Im}d_1^*$. 故令

$$\psi:[E]\longmapsto \alpha+\mathrm{Im}d_1^*$$

可知$[E]$通过 ψ 唯一确定了 $\mathrm{Ext}_R^1(B,A)$的一个元素.于是 ψ 是完全确定的.

再证 ψ 是满单射(一一对应).

为证此,找出 ψ 的逆映射$\theta:\mathrm{Ext}_R^1(B,A)\longrightarrow \mathrm{Yext}_R^1(B,A)$即可.仍用上段证明中的记号.由上证已知 $\alpha d_2=d_2^*(\alpha)=0$,因此 $\mathrm{Im}d_2\subseteq\mathrm{Ker}\alpha$.于是 α 诱导一个$\bar{\alpha}$ 使下图为交换图.

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{Im}d_2 & \xrightarrow{i_2} & P_1 & \longrightarrow & P_1/\mathrm{Im}d_2 & \longrightarrow & 0\\
 & & & & \downarrow\alpha & \swarrow\bar{\alpha} & & & \\
 & & & & A & & & &
\end{array}$$

其中 $\bar{\alpha}(p_1+\mathrm{Im}d_2)=\alpha(p_1),\forall p_1\in P_1,P_1/\mathrm{Im}d_2\simeq\mathrm{Im}d_1$.

由上章§2 命题 1 知,取 $D=A,B=P_0,U=E$,必有行正合交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & P_1/\mathrm{Im}d_2 & \xrightarrow{i_1} & P_0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0\\
 & & \downarrow\bar{\alpha} & & \downarrow\beta & & \downarrow I_B & & \\
0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & E & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

于是可定义

$$\theta:\mathrm{Ext}_R^1(B,A)\longrightarrow \mathrm{Yext}_R^1(B,A)$$

$$\alpha+\mathrm{Im}d_1^*\longmapsto[E]$$

先证 θ 与α 的选取无关.设 $\alpha'\sim\alpha$(α'与α 同伦),即,$\alpha-\alpha'=sd_1$,其中 $s:P_0\to A$.用图追踪得交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
P_2 & \xrightarrow{d_2} & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow{\scriptstyle 0} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha'} & \swarrow{\scriptstyle s} & \downarrow{\scriptstyle \beta+is} & & \downarrow{\scriptstyle I_B} & & \\
0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & E & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

于是有交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & P_1/\mathrm{Im}d_2 & \xrightarrow{i_1} & P_0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \overline{\alpha'}} & & \downarrow{\scriptstyle \beta+is} & & \downarrow{\scriptstyle I_B} & & \\
0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & E & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

由此可验知

$$\theta(\alpha+\mathrm{Im}d_1^*)=\theta(\alpha'+\mathrm{Im}d_1^*)$$

从而即知 θ 与 α 的选取无关.

再直接验证

$$\psi\theta=I_{\mathrm{Ext}_R^1(B,A)}$$

$$\theta\psi=I_{\mathrm{Yext}_R^1(B,A)}$$

即得欲证. □

下面介绍 Ext 的公理化(特征刻画). 这个公理化是建立在下述定义的基础上的.

定义 8 设 $\{T_n, n\in\mathbb{Z}\}$ 为一个共变函子列, 若对 $_R\mathfrak{M}$ 的任意正合列

$$0\longrightarrow A'\longrightarrow A\longrightarrow A''\longrightarrow 0$$

都有连接同态 $\Delta_n: T_n(A'')\to T_{n-1}(A')$ 使下述两点成立:

(i) $\cdots\longrightarrow T_n(A')\longrightarrow T_n(A)\longrightarrow T_n(A'')\xrightarrow{\Delta_n} T_{n-1}(A')\longrightarrow$

$$T_{n-1}(A) \longrightarrow T_{n-1}(A'') \xrightarrow{\Delta_{n-1}} T_{n-2}(A') \longrightarrow \cdots$$

为复形;

(ii) Δ_n 都是自然的,即对任意的行正合交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \\ 0 & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

都有交换图

$$\begin{array}{ccc} T_n(A'') & \xrightarrow{\Delta_n} & T_{n-1}(A') \\ \downarrow T_n h & & \downarrow T_n f \\ T_n(B'') & \xrightarrow{\Delta_n} & T_{n-1}(B') \end{array} \qquad \forall n \in \mathbf{Z}$$

则称 $\{T_n\}$ 为**连接的**(connected).

若(i)中的复形为零调的(即为正合列),则又称 $\{T_n\}$ 为**强连接的**(strongly connected).

若对一切 $n<0$, $T_n=0$,则称 $\{T_n\}$ 为**正的**.若对一切 $n>0$, $T_n=0$,则称 $\{T_n\}$ 为**负的**(此时常改用上标:Δ^n: $T^n(A'')\to T^{n+1}(A')$).

我们可证如下定理.

定理 14 设 $\{T^n\}$ 为负的且

(i) $\{T^n\}$ 为强连接的;

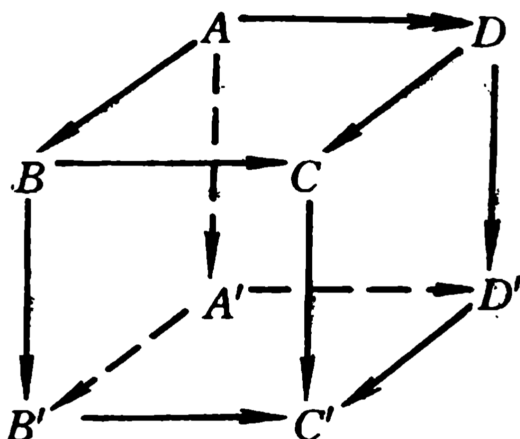
(ii) $T^0 \underset{\text{nat}}{\simeq} \mathrm{Hom}_R(C,-)$,对某一个 $C\in {}_R\mathfrak{M}$;

(iii) $T^n(E)=0$, $\forall E\in \mathrm{Inj}_R\mathfrak{M}$, $\forall n\geqslant 1$,

则 $T^n \underset{\text{nat}}{\simeq} \mathrm{Ext}_R^n(C,-)$, $\forall n\geqslant 0$.反过来也成立.

本定理之证是对 n 用数学归纳法,需先证如下引理.

引理 3　在 Abel 范畴(比如${}_R\mathfrak{M}$)中若图



中 $A \twoheadrightarrow D$ 为满态射且除右一面 $DCC'D'$ 外，各面都是交换图．则右一面 $DCC'D'$ 也是交换图．

证　考察下述态射合成的关系(等号"‖"右说明理由)：

$$A \longrightarrow D \longrightarrow C \longrightarrow C'$$
$\|$ 上一面交换图⇒$A\to D\to C = A\to B\to C$
$$A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow C'$$
$\|$ 前一面交换图⇒$B\to C\to C' = B\to B'\to C'$
$$A \longrightarrow B \longrightarrow B' \longrightarrow C'$$
$\|$ 左一面交换图⇒$A\to B\to B' = A\to A'\to B'$
$$A \longrightarrow A' \longrightarrow B' \longrightarrow C'$$
$\|$ 下一面交换图⇒$A'\to B'\to C' = A'\to D'\to C'$
$$A \longrightarrow A' \longrightarrow D' \longrightarrow C'$$
$\|$ 后一面交换图⇒$A\to A'\to D' = A\to D\to D'$
$$A \longrightarrow D \longrightarrow D' \longrightarrow C'$$

知

$$A \longrightarrow D \longrightarrow C \longrightarrow C' = A \longrightarrow D \longrightarrow D' \longrightarrow C'$$

但 $A \twoheadrightarrow D$ 为满态射．故有

$$D \longrightarrow C \longrightarrow C' = D \longrightarrow D' \longrightarrow C'$$

即右一面也是交换图．　□

定理 14 之证

$n=0$ 时欲证的结论已含于条件(ii)中. $n=1$ 时, 任取 $A\in{}_R\mathfrak{M}$ 与正合列

$$0\longrightarrow A\rightarrowtail E\longrightarrow D\longrightarrow 0$$

其中 $E\in \mathrm{Inj}_R\mathfrak{M}$. 由条件(i)并由第一章§4 命题 1°补上唯一存在的 φ_A 得交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & & 0 & & \\
 & & & & & & \| \text{(iii)} & & \\
T^0E & \longrightarrow & T^0D & \longrightarrow & T^1A & \longrightarrow & T^1E & \longrightarrow & 0\\
\simeq\downarrow\text{(ii)} & & \simeq\downarrow & & \downarrow\varphi_A & & \simeq\downarrow 0 & & \simeq\downarrow 0\\
\mathrm{Ext}^0(C,E) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^0(C,D) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1(C,A) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1(C,E) & \longrightarrow & 0\\
\wr\|\text{(ii)} & & \wr\| & & & & \|\ E\in \mathrm{Inj}_R\mathfrak{M} & & \\
\mathrm{Hom}(C,E) & & \mathrm{Hom}(C,D) & & & & 0 & &
\end{array}\qquad (8)$$

于是由五引理(第一章§4 定理 2)知 φ_A 为同构.

下面证明 φ_A 是自然的, 且与 $A\rightarrowtail E$ 的选取无关. 为此设 $B\in{}_R\mathfrak{M}$, 则必有正合列

$$0\longrightarrow B\longrightarrow G\longrightarrow H\longrightarrow 0$$

其中 $G\in \mathrm{Inj}_R\mathfrak{M}$. 令 $f:A\longrightarrow B$ 为左 R-模同态, 则有交换图(带正合行)

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & E & \longrightarrow & D & \longrightarrow & 0\\
 & & f\downarrow & ① & \downarrow\ G\in\mathrm{Inj}_R\mathfrak{M} & ② & \downarrow\ \text{第一章§4 命题 1°} & & \\
0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & G & \longrightarrow & H & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

于是有立方图:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & T^0D & \longrightarrow & T^1A & & \\
 & \swarrow & \vdots & \swarrow & \downarrow \varphi_A & & \\
T^0H & \longrightarrow & T^1B & & & & \\
\downarrow & & \text{Hom}(C,D) & \dashrightarrow \varphi_B & \text{Ext}^1(C,A) & & \\
\downarrow & \swarrow & \downarrow & \swarrow & & & \\
\text{Hom}(C,H) & \longrightarrow & \text{Ext}^1(C,B) & & & &
\end{array}$$

由(ii)知左一面为交换图. 由定义 8(ii)(Δ^n 自然)与长正合列定理中连接同态的自然性知,上、下两面都是交换图. 再由 φ_A、φ_B 的构作知,前后两面也是交换图. 又由图(8)的上行正合知 $T^0D \twoheadrightarrow T^1A$ 为满同态. 故由引理 3 知右一面图为交换图,即 φ 为自然的.

取 $A=B, f=I_A$ 即知 φ_A 与 $A \rightarrowtail E$ 的选取无关. 仿上归纳地即可证出定理 14(注意 Ext 满足定理 14 的各条件),其逆显见.

注 5　定理 14 的对偶形式也成立,证法也是对偶的. 此时定理 14 中的(iii)可换成"$T^n(B)=0, \forall B \in \text{Free}_R\mathfrak{M}$(或 $B \in P_R\mathfrak{M}$)."

注 6　设 T 为左正合函子, $\{T^n\}$ 为负的且满足如下三条件:(i) $\{T^n\}$ 为强连接的;(ii) $T^0 \underset{\text{nat}}{\simeq} T$;(iii) $T^n(E)=0, \forall E \in \text{Inj}_R\mathfrak{M}, \forall n \geqslant 1$. 可证此时必有 $T^n \simeq R^nT, \forall n \geqslant 0$.

注 7　对固定的 $n>0$ 来刻画 $\text{Ext}_R^n(C,—)$ 仍是一个困难的问题. 1974 年 P. Griffith 证明了:设 R 为 Dedekind 环(无零因子的交换遗传环),其商域为 Q, $T: {}_R\mathfrak{M} \to {}_R\mathfrak{M}$ 为半正合的且保直积的共变函子,同时 $T(E)=0, \forall E \in \text{Inj}_R\mathfrak{M}$. 又 $\text{Hom}_R(Q, TP)=0, \forall P \in P_R\mathfrak{M}$,则 $T \simeq \text{Ext}_R^1(C,—)$,反之亦然. 有兴趣的读者可参看[Gr. 74].

习　题　3.3

1. 设 ${}_R\mathfrak{M}$ 中有正合列 $0 \to A \to B \to C \to 0$, $\text{lpd}(A)=a$, $\text{lpd}(B)=b$, $\text{lpd}(C)$

$=c$.证明(a,b,c)只有三种取值的可能:$(a,a+r,a+r)$, $r>0$;$(a,a-r,1+a)$, $r>0$;$(a,a,1+a-s)$, $s\geqslant 0$.

2. 证明在${}_R\mathfrak{M}$中A按C的任两个可裂扩张必为等价扩张.

3. 设$A'\neq 0$为$A\in{}_R\mathfrak{M}$的子模,$f\in \mathrm{Hom}_R(A',B)$, $\partial:\mathrm{Hom}_R(A',B)\to \mathrm{Ext}_R^1(A/A',B)$为连接同态.称$\partial(f)\in \mathrm{Ext}_R^1(A/A',B)$为$f$的障碍(obstruction).证明:$f$可开拓到$A$的充分必要条件是$f$的障碍为0.

4. 设$A=\coprod\limits_{j\in J}A_j$, $A_j\in{}_R\mathfrak{M}$.用定理4(i)证明

$$\mathrm{lpd}(A)=\max_{j\in J}\mathrm{lpd}(A_j)$$

§4 左导出函子 Tor 及其应用

本节将大体上平行于上节地介绍函子 Tor 的基本性质及应用.在上节定理2中,我们已得到如下结果:对任意的$A\in\mathfrak{M}_R$, $B\in{}_R\mathfrak{M}$,取A的删项平坦分解$\mathbb{F}_{\hat{A}}$及B的删项平坦分解$\mathbb{F}_{\hat{B}}$,则

$$H_n(\mathbb{F}_{\hat{A}}\bigotimes_R B)\simeq H_n(A\bigotimes_R\mathbb{F}_{\hat{B}}).$$

因此,Tor_n^R关于两个变元用投射分解所得的定义是一致的,没有必要再使用两套记号.由于投射模必为平坦模,投射分解必为平坦分解.因此,记$\mathbb{P}_{\hat{A}}$, $\mathbb{P}_{\hat{B}}$各为A, B的删项投射分解,则

$$H_n(\mathbb{F}_{\hat{A}}\bigotimes_R B)\simeq H_n(A\bigotimes_R\mathbb{F}_{\hat{B}})\simeq H_n(\mathbb{P}_{\hat{A}}\bigotimes_R B)\simeq H_n(A\bigotimes_R\mathbb{P}_{\hat{B}}).$$

由此可得如下结果.

定理1 用平坦分解定义的Tor_n^R与平坦分解的选取无关,且对两个变元A, B各用平坦分解所得的值是同构的,它们与用投射分解定义的Tor_n^R是一致的.即

用$\mathbb{F}_{\hat{A}}$得到的$\mathrm{Tor}_n^R(A,B)\simeq$用$\mathbb{F}_{\hat{B}}$得到的$\mathrm{Tor}_n^R(A,B)$

$\simeq$用$\mathbb{P}_{\hat{A}}$得到的$\mathrm{Tor}_n^R(A,B)\simeq$用$\mathbb{P}_{\hat{B}}$得到的$\mathrm{Tor}_n^R(A,B)$, $\forall A\in\mathfrak{M}_R$, $B\in{}_R\mathfrak{M}$.

容易验证如下结果.

定理2 对任意的$A\in\mathfrak{M}_R$, $B\in{}_R\mathfrak{M}$,我们有:

(i) 设 $n<0$，则 $\mathrm{Tor}_n^R(A,B)=0$；

(ii) $\mathrm{Tor}_n^R(A,-)\underset{\mathrm{nat}}{\simeq}A\underset{R}{\otimes}-$，$\mathrm{Tor}_0^R(-,B)\underset{\mathrm{nat}}{\simeq}-\underset{R}{\otimes}B$；

(iii) 设在 ${}_R\mathfrak{M}$ 中

$$0\longrightarrow B'\longrightarrow B\longrightarrow B''\longrightarrow 0$$

正合，则有自然的连接同态∂使成长正合列

$$\cdots\longrightarrow \mathrm{Tor}_n^R(A,B'')\xrightarrow{\partial_n}\mathrm{Tor}_{n-1}^R(A,B')\longrightarrow\mathrm{Tor}_{n-1}^R(A,B)\longrightarrow$$
$$\mathrm{Tor}_{n-1}^R(A,B'')\xrightarrow{\partial_{n-1}}\mathrm{Tor}_{n-2}^R(A,B')\longrightarrow\cdots\longrightarrow\mathrm{Tor}_1^R(A,B'')\xrightarrow{\partial_1}A$$
$$\underset{R}{\otimes}B'\longrightarrow A\underset{R}{\otimes}B\longrightarrow A\underset{R}{\otimes}B''\longrightarrow 0;$$

(iv) 设在 $\mathfrak{M}_R$ 中

$$0\longrightarrow A'\longrightarrow A\longrightarrow A''\longrightarrow 0$$

正合，则有自然的连接同态∂使成长正合列

$$\cdots\longrightarrow \mathrm{Tor}_n^R(A'',B)\xrightarrow{\partial_n}\mathrm{Tor}_{n-1}^R(A',B)\longrightarrow\mathrm{Tor}_{n-1}^R(A,B)\longrightarrow$$
$$\mathrm{Tor}_{n-1}^R(A'',B)\xrightarrow{\partial_{n-1}}\mathrm{Tor}_{n-2}^R(A',B)\longrightarrow\cdots\longrightarrow\mathrm{Tor}_1^R(A'',B)\xrightarrow{\partial_1}$$
$$A'\underset{R}{\otimes}B\longrightarrow A\underset{R}{\otimes}B\longrightarrow A''\underset{R}{\otimes}B\longrightarrow 0;$$

(v) $\mathrm{Tor}_n^R(A,B)\in{}_{C(R)}\mathfrak{M}$，因此当 R 为交换环时，$\mathrm{Tor}_n^R(A,B)\in{}_R\mathfrak{M}$，其中 $C(R)$表示 R 的中心.

下面证明：对交换环 R，Tor_n^R 关于两个变元有对称性（Ext_R^n 无此性质）.

定理 3　设 R°为 R 的反环，则

$$\mathrm{Tor}_n^R(A,B)\simeq\mathrm{Tor}_n^{R^\circ}(B,A),\ \forall A\in\mathfrak{M}_R,B\in{}_R\mathfrak{M},n\geqslant 0.$$

因此，当 R 为交换环时

$$\mathrm{Tor}_n^R(A,B)\simeq\mathrm{Tor}_n^R(B,A)$$

证　本定理事实上是$\otimes$性质的推广，因为显然有同构

$$A\underset{R}{\otimes}B\xrightarrow[\simeq]{}B\underset{R^\circ}{\otimes}A$$
$$a\otimes b\longmapsto b\otimes a$$

取 A 的删项投射分解

$$\mathbb{P}_{\hat{A}} = \cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow 0$$

记 t_n 为下述同构

$$P_n \bigotimes_R B \xrightarrow[\simeq]{t_n} B \bigotimes_{R^*} P_n$$

$$x_n \otimes b \longmapsto b \otimes x_n$$

则 $t = \{t_n\}$ 是一个同构的链映射：

$$t = \{t_n\} : \mathbb{P}_{\hat{A}} \bigotimes_R B \longrightarrow B \bigotimes_{R^*} \mathbb{P}_{\hat{A}}$$

因此

$$\begin{array}{ccc} H_n(\mathbb{P}_{\hat{A}} \bigotimes_R B) & \simeq & H_n(B \bigotimes_{R^*} \mathbb{P}_{\hat{A}}) \\ \| & & \| \\ \operatorname{Tor}_n^R(A, B) & & \operatorname{Tor}_n^{R^*}(B, A) \end{array}$$

用维数转移法可证如下结果. □

定理 4

(i) $F \in \operatorname{Flat}\mathfrak{M}_R \Leftrightarrow \operatorname{Tor}_n^R(F, B) = 0, \forall n \geqslant 1, B \in {}_R\mathfrak{M}$;

(ii) $F \in \operatorname{Flat}_R\mathfrak{M} \Leftrightarrow \operatorname{Tor}_n^R(A, F) = 0, \forall n \geqslant 1, A \in \mathfrak{M}_R$.

证 只需证(i).(ii)的证法是类似的.

$\Rightarrow$:任取 ${}_R\mathfrak{M}$ 中的正合列

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} P \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

其中 $P \in \mathrm{P}_R\mathfrak{M}$. 由长正合列定理知,有正合列

$$\operatorname{Tor}_1^R(F, B) \xrightarrow{\partial_1} F \bigotimes_R K \xrightarrow{I_F \otimes i} F \bigotimes_R P.$$

由 i 为单同态及 F 为平坦模知 $I_F \otimes i$ 为单同态,因此,

$$\operatorname{Tor}_1^R(F, B) = 0, \quad \forall B \in {}_R\mathfrak{M}$$

即, $n = 1$ 时欲证的结论成立.

下设欲证的结论对 n 成立,来证明对 $n+1$ 也成立即可. 事实上,由下述正合列(在下面以及后文的证明中,在不致发生混淆时,为醒目起见,符号尽量从简. 比如省去 Tor 上方肩上的 R 等):

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Tor}_{n+1}(F,P) & \longrightarrow & \mathrm{Tor}_{n+1}(F,B) & \xrightarrow{\partial} & \mathrm{Tor}_n(F,K) \\ \| \ P\in \mathrm{P}_R\mathfrak{M}. & & & & \| \ \text{归纳假设} \\ 0 & & & & 0 \end{array}$$

即知

$$\mathrm{Tor}_{n+1}(F,B)=0, \quad \forall B\in {}_R\mathfrak{M},$$

$\Leftarrow$:只需证:对任意的 $B\in {}_R\mathfrak{M}$, $\mathrm{Tor}_1(F,B)=0$ 时, $F\in \mathrm{Flat}\mathfrak{M}_R$.

为此,取${}_R\mathfrak{M}$ 中正合列

$$0\longrightarrow B'\xrightarrow{i'} B\longrightarrow B''\longrightarrow 0$$

则由长正合列定理得正合列

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Tor}_1(F,B'') & \xrightarrow{\partial} & F\otimes B' & \xrightarrow{I_F\otimes i'} & F\otimes B \\ \| \ \text{已知} & & & & \\ 0 & & & & \end{array}$$

于是对一切单同态 $i':B'\longrightarrow B$, $I_F\otimes i'$ 都是单同态,即 $F\in \mathrm{Flat}\mathfrak{M}_R$. □

由本定理立得如下推论.

推论 1

(i) $F\in \mathrm{Flat}\mathfrak{M}_R \Leftrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(F,B)=0, \forall B\in {}_R\mathfrak{M}$;

(ii) $F\in \mathrm{Flat}_R\mathfrak{M} \Leftrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(B,F)=0, \forall B\in \mathfrak{M}_R$.

用本定理与长正合列还可立得如下结果.

推论 2 设 $0\longrightarrow A'\longrightarrow A\longrightarrow A''\longrightarrow 0$ 为${}_R\mathfrak{M}$ 中的正合列, $A', A''\in \mathrm{Flat}_R\mathfrak{M}$,则 $A\in \mathrm{Flat}_R\mathfrak{M}$.

用第一章§7 定理 5 的结果:

$$\left(\coprod_{j\in J} A_j\right)\otimes_R B \simeq \coprod_{j\in J}(A_j\otimes_R B)$$

$$A\otimes_R \coprod_{j\in J} B_j \simeq \coprod_{j\in J}(A\otimes_R B_j)$$

及维数转移法,可"机械地"证出如下更广的结果.

定理 5 设 $A_i\in \mathfrak{M}_R$, $\forall i\in I$, $B_j\in {}_R\mathfrak{M}$, $\forall j\in J$,则

$$\mathrm{Tor}_n^R(\coprod_{i\in I}A_i,\coprod_{j\in J}B_j)\simeq\coprod_{\substack{i\in I\\ j\in J}}\mathrm{Tor}_n^R(A_i,B_j),\quad\forall\, n\geqslant 0$$

证 $n=0$ 时, $\mathrm{Tor}_0\underset{\mathrm{nat}}{\simeq}\otimes$, 欲证的同构当然成立.

$n=1$ 时, 取 ${}_R\mathfrak{M}$ 中的正合列.

$$0\longrightarrow K_j\longrightarrow P_j\longrightarrow B_j\longrightarrow 0, \text{其中 } P_j\in \mathrm{P}_R\mathfrak{M}, \forall\, j\in J,$$

则有正合列

$$0\longrightarrow \coprod_{j\in J}K_j\longrightarrow \coprod_{j\in J}P_j\longrightarrow \coprod_{j\in J}B_j\longrightarrow 0, \text{其中} \coprod_{j\in J}P_j\in \mathrm{P}_R\mathfrak{M}.$$

由长正合列定理并经第一章§4命题1补 φ 后, 知有行正合交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
\underset{\amalg P_j\in \mathrm{P}_R\mathfrak{M}}{0 =\!=} \mathrm{Tor}_1(\amalg A_i,\amalg P_j) & \longrightarrow & \mathrm{Tor}_1(\amalg A_i,\amalg B_j) & \xrightarrow{\partial} & \amalg A_i\otimes\amalg K_j & \longrightarrow & \amalg A_i\otimes\amalg P_j\\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\simeq} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\simeq}\\
\underset{P_j\in \mathrm{P}_R\mathfrak{M}}{0 =\!=} \coprod_{i,j}\mathrm{Tor}_1(A_i,P_j) & \longrightarrow & \coprod_{i,j}\mathrm{Tor}_1(A_i,B_j) & \longrightarrow & \coprod_{i,j}(A_i\otimes K_j) & \longrightarrow & \coprod_{i,j}(A_i\otimes P_j)
\end{array}$$

由五引理知 φ 为同构, 即 $n=1$ 时欲证结果成立.

下设对 $n=k-1$ 时欲证结果成立, 来证 $n=k$ 时欲证结果成立, 这里 $k>1$.

仍用长正合列定理, 仿上有行正合交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
0 =\!= \mathrm{Tor}_k(\amalg A_i,\amalg P_j) & \longrightarrow & \mathrm{Tor}_k(\amalg A_i,\amalg B_j) & \xrightarrow{\partial} & \mathrm{Tor}_{k-1}(\amalg A_i,\amalg K_j) & \longrightarrow & \mathrm{Tor}_{k-1}(\amalg A_i,\amalg P_j)=0\\
 & & & & \Big\downarrow{\scriptstyle\simeq\,(\text{归纳假设})} & & \\
0 =\!= \coprod_{i,j}\mathrm{Tor}_k(A_i,P_j) & \longrightarrow & \coprod_{i,j}\mathrm{Tor}_k(A_i,B_j) & \xrightarrow{\partial'} & \coprod_{i,j}\mathrm{Tor}_{k-1}(A_i,K_j) & \longrightarrow & \coprod_{i,j}\mathrm{Tor}_{k-1}(A_i,P_j)=0
\end{array}$$

由上图知, ∂ 与 ∂' 都是同构, 因此欲证的结论对 $n=k$ 也成立. □

现在我们对 Abel 群(${}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M}$)来计算 Tor_n. 先证明下述命题.

命题 1 设 A,B 为任意 Abel 群, 则

$$\mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(A,B)=0,\quad\forall\, n\geqslant 2$$

证　由上节命题 2(注意$\mathbb{Z}\in$ LPID)知，自由$\mathbb{Z}$-模的子模都是自由的. 因此，投射$\mathbb{Z}$-模的子模当然更是投射的. 于是对 A 必有投射分解

$$0\longrightarrow K\longrightarrow P\longrightarrow A\longrightarrow 0,\quad P,K\in \mathrm{P}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M}$$

由长正合列定理得正合列

$$\begin{array}{ccccc}\mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(P,B) & \longrightarrow & \mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(A,B) & \xrightarrow{\partial} & \mathrm{Tor}_{n-1}^{\mathbb{Z}}(K,B)\\ \| \ P\in \mathrm{P}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M} & & & & \| \ K\in \mathrm{P}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M},\ n\geqslant 2\\ 0 & & & & 0\end{array}$$

于是得 $\mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(A,B)=0,\ \forall\, n\geqslant 2.$ □

由此命题知，对 Abel 群 A,B，$\mathrm{Tor}_2^{\mathbb{Z}}$ 是不必计算的(都是平凡的)且命题 1 对 $R\in$ LPID 仍成立. 下面我们来研究 Abel 群的 $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}$ 计算. 我们有

命题 2　设 B 为任意 Abel 群，$m\neq 0$，则

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_m,B)\simeq \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(B,\mathbb{Z}_m)\simeq B[m]\equiv\{b\in B\mid mb=0\}$$

证　由定理 3 知 $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A,B)\simeq \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(B,A)$，只需证

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_m,B)\simeq B[m]$$

用维数转移法，从正合列

$$0\longrightarrow \mathbb{Z}\xrightarrow[z\ \longmapsto\ mz]{i}\mathbb{Z}_m\longrightarrow 0$$

得长正合列

$$\begin{array}{ccccccc}\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},B) & \longrightarrow & \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_m,B) & \xrightarrow{\partial} & \mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}} B & \xrightarrow{i\otimes I_B} & \mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}} B\\ \| \ \mathbb{Z}\in \mathrm{P}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M} & & & & \wr\| & & \wr\|\\ 0 & & & & B & & B\\ & & & & b & \longmapsto & mb\end{array}$$

故

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_m,B)\simeq B[m]$$ □

由此命题立得如下推论

推论 3　设 $m,n\neq 0$，则

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_m,\mathbb{Z}_n)\simeq\mathbb{Z}_m[n]\simeq d\,\mathbb{Z}/m\,\mathbb{Z}\simeq\mathbb{Z}_{(m,n)}$$

其中 $d=\dfrac{m}{(m,n)}$,(m,n)为 m,n 的最大公约数. 因此

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_m,\mathbb{Z}_n)\simeq\begin{cases}0, & (m,n)=1\text{ 时}\\ \mathbb{Z}_m, & m\mid n\text{ 时}\\ \mathbb{Z}_n, & n\mid m\text{ 时}\\ \mathbb{Z}_{(m,n)}, & \text{一般情况}\end{cases}$$

由此命题与定理 5 又得

推论 4 设 $0\neq m_i,n_j\in\mathbb{Z}$,Abel 群

$$A=(\coprod_{i_1\in I_1}\mathbb{Z})\amalg(\coprod_{i\in I}\mathbb{Z}_{m_i}),\quad B=(\coprod_{j_1\in J_1}\mathbb{Z})\amalg(\coprod_{j\in J}\mathbb{Z}_{n_j})$$

则

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A,B)\simeq\coprod_{\substack{i\in I\\ j\in J}}\mathbb{Z}_{(m_i,n_j)}$$

于是由上知,我们已完全解决了有限生成 Abel 群的 Tor 计算问题.

为了说明 Tor(torsion(挠)的前三字母)命名的含意,下面来介绍 Tor 与挠性的关系.

定义 1 设 R 为交换环,$A\in{}_R\mathfrak{M}$,则称

$$T(A)=\{a\in A\mid \text{有非零零因子 } r\in R \text{ 使 } ra=0\}$$

(显然为 A 的子R-模)为 A 的**挠子模**(torsion submodule).

当 $T(A)=A$ 时,称 A 为**挠模**(torsion module);

当 $T(A)=0$ 时,称 A 为**无挠模**(torsionfree module).

注 1 设 R 为任意环,$M\in{}_R\mathfrak{M}$,则 $M^*=\mathrm{Hom}_R(M,R)\in\mathfrak{M}_R$. $M^{**}=\mathrm{Hom}_R(M^*,R)\in{}_R\mathfrak{M}$. 称 M^* 为 M 的对偶模,M^{**} 为 M 的二次对偶模,令 $\sigma:M\longrightarrow M^{**}$ 使 $\sigma(x)=x^{**}\in M^{**}$,其中 $x^{**}(f)=f(x)$,$\forall f\in M^*$,则 σ 为${}_R\mathfrak{M}$ 中的同态,称为 M 到 M^{**} 的标准同态. 当 σ 为同构时,称 M 为**自反模**(reflexive module);当 σ 为单同态时,称 M 为**半自反模**(semi-reflexive module),又称为**缺挠模**(torsionless module). 缺挠模与无挠模是不同的概念,应注意区分. 对 $\mathbb{Z}$-模(Abel 群)而言,缺挠模必为无挠模,但反过来不对. 可以证明:

对无零因子交换环(整环)上的有限生成模,二者是等价的.还可证明:对一般环上的模 M,M^* 必是缺挠模;在整环上,如果 M 平坦,则 M 一定无挠.欲知其详可参看[N,73].

从定义 1 可得${}_R\mathfrak{M}$ 正合列

$$0 \longrightarrow T(A) \rightarrowtail A \twoheadrightarrow A/T(A) \longrightarrow 0 \tag{1}$$

容易看出 $A/T(A)$为无挠模.因此,任一个 R - 模都是其挠子模按一个无挠模的扩张(这里将上节对短正合列定义的扩张移用到模上).

另一方面,若对任意的 $f \in \mathrm{Hom}_R(A,B)$,定义

$$T(f) = f|_{T(A)} \text{(}f\text{ 在 }T(A)\text{上的限制同态)}$$

则可看出:$T: {}_R\mathfrak{M} \to {}_R\mathfrak{M}$ 为一个共变函子,称为**挠函子**(torsion functor)

下面均设 R 为无零因子交换环,即整环(domain).记 Q 为 R 的商域,$K = Q/R$.由

$$Q \underset{R}{\otimes} I \simeq QI, \forall I \lhd R$$
$$q \otimes i \longmapsto qi$$

知 $Q \in \mathrm{Flat}_R\mathfrak{M}$(见上章§3),据此我们可证

命题 3 设 R 为整环,$A \in {}_R\mathfrak{M}$ 为挠模,则

$$\mathrm{Tor}_1^R(K,A) \underset{\mathrm{nat}}{\simeq} A$$

证 对下正合列用维数转移法.

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow Q \longrightarrow K \longrightarrow 0 \tag{2}$$

$\Downarrow$ 长正合列

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{Tor}_1(Q,A) & \longrightarrow & \mathrm{Tor}_1(K,A) & \xrightarrow{\partial} & R \underset{R}{\otimes} A & \longrightarrow & Q \underset{R}{\otimes} A \\ \| \; Q \in \mathrm{Flat}_R\mathfrak{M} & & & & \wr\| & & \| \; A \text{ 为挠模} \\ 0 & & & & A & & 0 \end{array}$$

由此知有 σ_A 使

$$\mathrm{Tor}_1(K,A) \overset{\sigma_A}{\simeq} A$$

下证此同构为自然的. 设 $B \in {}_R\mathfrak{M}$, $f \in \mathrm{Hom}_R(A, B)$. 由连接同态$\partial$的自然性即得交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Tor}_1(K, A) & \xrightarrow{\partial_A} & A \\ \downarrow f_* & & \downarrow f \\ \mathrm{Tor}_1(K, B) & \xrightarrow{\partial_B} & B \end{array}$$

由此即得∂_A 的自然性. □

命题 4 设 R 为整环,则

$$\mathrm{Tor}_n^R(K, A) = 0, \quad \forall A \in {}_R\mathfrak{M}, n \geqslant 2$$

证 仍对(2)用维数转移法:

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Tor}_n(Q, A) & \longrightarrow \mathrm{Tor}_n(K, A) & \xrightarrow{\partial} & \mathrm{Tor}_{n-1}(R, A) & \text{正合} \\ \| \; Q \in \mathrm{Flat}_R\mathfrak{M} & & & \| \; R \in \mathrm{Flat}_R\mathfrak{M} & \\ 0 & & & 0 & \end{array}$$

由此知 $\mathrm{Tor}_n(K, A) = 0$, $\forall n \geqslant 2$. □

命题 5 设 R 为整环, A 为无挠R-模,则

$$\mathrm{Tor}_1^R(K, A) = 0$$

因此

$$\mathrm{Tor}_n^R(K, A) = 0, \quad \forall n \geqslant 1$$

证 由上章§2知, A 必可嵌入到一个内射 R-模 E 中,即有 $i: A \rightarrowtail E$. 由于 A 为无挠模, i 必诱导一个单同态.

$$\bar{i}: A \rightarrowtail E/T(E) \equiv V$$

但内射模必为可除模(上章§2),可除模的商模也是可除模,因此 $V \in \mathrm{Div}_R\mathfrak{M}$.

我们先证 $V \in {}_Q\mathfrak{M}$,即 V 为 Q(域)上的线性空间. 事实上,任取 $0 \neq r \in R$, $e \in E$,由 $E \in \mathrm{Div}_R\mathfrak{M}$ 知,必有 $x \in E$ 使 $rx = e$. 若又有 $x_1 \in E$ 使 $rx_1 = e$. 则 $r(x - x_1) = 0$,于是 $x - x_1 \in T(E)$. 由此

知,对任意的 $v\in V$,$0\neq r\in R$,必有唯一的 $y\in V$ 使 $ry=v$,即,$\frac{1}{r}v$是可定义的.从而对任意的$\frac{s}{r}\in Q$,$0\neq r\in R$,$s\in R$,$\frac{s}{r}v$ 也有定义.容易验知,对这个运算 $V\in {}_Q\mathfrak{M}$.

由 $V\in {}_Q\mathfrak{M}$ 知(注意 Q 为域)

$$V\simeq\coprod_{j\in J}Q.$$

但 $Q\in \mathrm{Flat}_R\mathfrak{M}$,因此 $V\in \mathrm{Flat}_R\mathfrak{M}$.于是对正合列

$$0\longrightarrow A\longrightarrow V\longrightarrow V/A\longrightarrow 0$$

用维数转移法得正合列

$$\begin{array}{ccccc}\mathrm{Tor}_{n+1}(K,V/A) & \xrightarrow{\partial} & \mathrm{Tor}_n(K,A) & \longrightarrow & \mathrm{Tor}_n(K,V)\\ \|\ \text{命题 4} & & & & \|\ V\in\mathrm{Flat}_R\mathfrak{M}\\ 0 & & & & 0\end{array}$$

故 $\mathrm{Tor}_n^R(K,A)=0$. □

由命题 3 前的分析与本命题之证,事实上我们已经得到如下推论.

推论 5 设 R 为整环,则

(i) R 的商域 $Q\in \mathrm{Flat}_R\mathfrak{M}$;

(ii) 任何无挠 R-模都可嵌入到一个 Q 上的线性空间中;

(iii) 任何无挠 R-模都可嵌入到一个平坦 R-模中.

将命题 3 改进,我们可得

定理 6 设 R 为整环,则

$$\mathrm{Tor}_1^R(K,-)\underset{\text{nat}}{\simeq}T$$

证 对(1)用维数转移法得正合列

$$\begin{array}{ccccc}\mathrm{Tor}_2(K,A/T(A)) & \xrightarrow{\partial} & \mathrm{Tor}_1(K,T(A)) & \xrightarrow{i_*} & \mathrm{Tor}_1(K,A)\\ \|\ \text{命题 4} & & \wr\|\ \text{命题 3} & & \\ 0 & & T(A) & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c}\longrightarrow\mathrm{Tor}_1(K,A/T(A))\\ \|\ \text{命题 5}\\ 0\end{array}$$

因此 $\mathrm{Tor}_1(K,A)\simeq T(A)$. 自然性是显见的. □

现在,我们耐心地分几步证明如下的重要结果.

定理 7 设 R 为整环,则对任意的 $A,B\in{}_R\mathfrak{M}$, $\mathrm{Tor}_n^R(A,B)$ 必为挠模,其中 $n\geqslant 1$ 为任意正整数.

证 (Ⅰ) 设 B 为挠模,来证 $\mathrm{Tor}_n(A,B)$ 对任意的 $n\geqslant 0$ 及 $A\in{}_R\mathfrak{M}$,均为挠模.

$n=0$ 时由一切 $b\in B$ 均为挠元素(即有 $0\neq r\in R$ 使 $rb=0$)知, $a\otimes b$ 为挠元素, $\forall a\in A$. 因此

$$\mathrm{Tor}_0(A,B)\simeq A\otimes B$$

为挠模.

$n=1$ 时,取正合列

$$0\longrightarrow N\longrightarrow P\longrightarrow A\longrightarrow 0$$

其中 $P\in \mathrm{P}_R\mathfrak{M}$,得正合列

$$\begin{array}{l}\mathrm{Tor}_1(P,B)\longrightarrow \mathrm{Tor}_1(A,B)\xrightarrow{\partial} N\otimes B\\ \quad\| \; P\in \mathrm{P}_R\mathfrak{M}\\ \quad 0\end{array}$$

由此知, ∂为单同态. 因 B 为挠模,由上证知 $N\otimes B$ 为挠模. 于是由 ∂的单性知 $\mathrm{Tor}_1(A,B)$为挠模.

用下述的正合列经分析即归纳地证出了(Ⅰ):

$$\begin{array}{llll}\mathrm{Tor}_{n+1}(P,B)\longrightarrow \mathrm{Tor}_{n+1}(A,B)\xrightarrow{\partial} & \mathrm{Tor}_n(N,B)\longrightarrow & \mathrm{Tor}_n(P,B)\\ \quad\| \; P\in \mathrm{P}_R\mathfrak{M} & \text{挠模} & \| \; {n\geqslant 1 \atop P\in \mathrm{P}_R\mathfrak{M}}\\ \quad 0 & \text{(归纳假设)} & 0\end{array}$$

(Ⅱ) 设 $A,C\in{}_R\mathfrak{M}$ 为挠模且

$$A\xrightarrow{f_1}B\xrightarrow{f_2}C$$

在 B 处正合,则 B 也为挠模.

为证此,任取 $b\in B$,来证 b 为挠元.

(i) 若 $f_2(b)=0$,则 $b\in\mathrm{Ker}f_2=\mathrm{Im}f_1\Rightarrow\exists\, a\in A$ 使 $b=f_1(a)$

$\underset{A\text{为挠模}}{\Longrightarrow} \exists 0 \neq r \in R$ 使 $ra = 0 \Rightarrow rb = f_1(ra) = 0 \Rightarrow b$ 为挠元.

(ii) 若 $f_2(b) \neq 0$，由 $f_2(b) = c \in C \underset{C\text{为挠模}}{\Longrightarrow} \exists 0 \neq r_1 \in R$ 使 $r_1 c = 0 \Rightarrow f_2(r_1 b) = r_1 c = 0 \underset{(\text{i})}{\Longrightarrow} r_1 b$ 为挠元 $\underset{R\text{为整环}}{\Longrightarrow} b$ 为挠元.

(Ⅲ) 定理的证明：

$n=1$ 时

(i) 若 B 为无挠模，则 $\text{Tor}_1(A,B)$ 为挠模.

用命题 5 的证法，知有 $V \in {}_Q\mathfrak{M}$ 成 ${}_R\mathfrak{M}$ 正合列

$$0 \longrightarrow B \longrightarrow V \longrightarrow V/B \longrightarrow 0$$

于是有正合列

$$\text{Tor}_2(A, V/B) \xrightarrow{\partial} \text{Tor}_1(A,B) \longrightarrow \text{Tor}_1(A, V) \underset{V \in \text{Flat}_R \mathfrak{M}}{=\!=\!=} 0$$

因此∂为满同态.

由 B 为无挠模知，可取 $V = {}_Q\langle B \rangle$，于是对任意的 $v \in V$，有 $r \in R$ 使 $rv \in B$，从而 V/B 为挠R－模. 故由(Ⅰ)知 $\text{Tor}_2(A, V/B)$ 为挠 R－模.

但∂为满同态，于是

$$\text{Tor}_1(A,B) \simeq \text{Tor}_2(A, V/B)/\text{Ker}\partial$$

也是挠 R－模.

(ii) 任取 $B \in {}_R\mathfrak{M}$. 在(i)的基础上证明 $\text{Tor}_1(A,B)$仍为挠模.

事实上，由正合列

$$0 \longrightarrow TB \longrightarrow B \longrightarrow B/TB \longrightarrow 0$$

得正合列

$$\text{Tor}_1(A, TB) \longrightarrow \text{Tor}_1(A,B) \longrightarrow \text{Tor}_1(A, B/TB)$$

由 TB 为挠R－模，用(Ⅰ)知 $\text{Tor}_1(A, TB)$也为挠 R－模. 由 B/TB 为无挠模用(i)知 $\text{Tor}_1(A, B/TB)$为挠模. 因此再用(Ⅱ)即知 $\text{Tor}_1(A,B)$为挠 R－模，用归纳法即可证出定理. □

从定理 6 与定理 7 足可看出函子 Tor 命名的含意.

仿照上节 Ext 的公理化，也可给出 $\text{Tor}_1(A,-)$的公理化形

式:

设$\{T_n \mid n\geqslant 0\}$为正的共变函子列,则

$$T_n \simeq \underset{n\geqslant 0}{\mathrm{Tor}_n}(A,-) \Leftrightarrow \begin{cases} (1)\ \{T_n\}\text{是强连接的} \\ (2)\ T_0 \simeq A\otimes -,\text{对某一个 } A\in \mathfrak{M}_R \\ (3)\ T_n(P)=0,\ \forall P\in \mathrm{Free}_R\mathfrak{M},\ n\geqslant 1 \end{cases}$$

对整环 R 上 R - 模的挠函子 T,可证其右导出函子为

$$R^nT \simeq \begin{cases} T, & n=0 \\ K\underset{R}{\otimes} -, & n=1 \\ 0, & n>1 \end{cases}$$

其中 $K=Q/R$,Q 为 R 的商域.

下面我们介绍 Tor 函子与弱维数的关系.

定义 2 设

$$\cdots \longrightarrow F_n \xrightarrow{d_n} F_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

为 $A\in\mathfrak{M}_R$ 的平坦分解,则称 $Y_j=\mathrm{Ker}d_j$, $j\geqslant 0$ 为 A 的第 n 个轭(yoke).

显然,合冲 K_n 是轭,但反过来不一定.而且对轭已没有类似于 Schanuel 引理那样的结果.

例 1 设 $R=\mathbb{Z}$, $K=\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.由推论 5 知$\mathbb{Q}\in \mathrm{Flat}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M}$.又由上节命题 2 知,自由$\mathbb{Z}$ - 模的子模也是自由$\mathbb{Z}$ - 模.因此 K 有两个平坦分解:

$$0\longrightarrow \mathbb{Z}\longrightarrow \mathbb{Q}\longrightarrow K\longrightarrow 0$$
$$0\longrightarrow S\longrightarrow F\longrightarrow K\longrightarrow 0$$

其中 $F\in \mathrm{Free}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M}$,且是无限生成的(否则 $K=\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 将是有限生成 Abel 群.由有限生成 Abel 群结构定理知,这不可能,因为 K 是可除 Abel 群.同理知$\mathbb{Q}$ 作为$\mathbb{Z}$ - 模必不是有限生成的).此时$\mathbb{Z}\oplus F$ 当然是自由$\mathbb{Z}$ - 模.但$\mathbb{Q}$ 不可能是投射$\mathbb{Z}$ - 模(否则必为无限生成自由$\mathbb{Z}$ - 模,因此有基元素 $q_1\neq q_2$ 是$\mathbb{Z}$ - 线性无关的.但对$\forall q_1$,

$q_2 \in \mathbb{Q}$，显然有 $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ 使 $a_1 q_1 + a_2 q_2 = 0$，引出矛盾）. 故 $\mathbb{Z} \oplus F \simeq S \oplus \mathbb{Q}$ 不可能成立. 从而不可能有类似于 Schanuel 引理的结果. 因此，处理平坦维数不能用处理投射维数、内射维数的一些办法. 但我们仍可证明我们需要的一些类似结果.

定理 8　设 $A \in \mathfrak{M}_R$. 则下述各点是等价的：

(i) $\mathrm{rfd}(A) \leqslant n$；

(ii) $\mathrm{Tor}_{n+j}^R(A, B) = 0, \forall B \in {}_R\mathfrak{M}, j \geqslant 1$；

(iii) $\mathrm{Tor}_{n+1}^R(A, B) = 0, \forall B \in {}_R\mathfrak{M}$；

(iv) 在 A 的任意平坦分解中，$Y_{n-1} \in \mathrm{Flat}\mathfrak{M}_R$.

证　(i)⇒(ii)：由上节知 $\mathrm{Tor}_{n+j}(A, B)$ 与 A 的平坦分解之选取无关. 又由本章 §2 命题 2 之证知，该命题对平坦分解（用 $\{Y_n\}$ 代替那里的 $\{K_n\}$）仍成立. 因此 (i)⇒(ii) 成立.

(ii)⇒(iii) 是当然的.

(iii)⇒(iv)：由于本章 §2 命题 2 对平坦分解仍成立，我们有

$$\begin{array}{l} \mathrm{Tor}_{n+1}(A, B) \simeq \mathrm{Tor}_1(Y_{n-1}, B) \quad \forall B \in {}_R\mathfrak{M}. \\ \quad \| \, (3) \\ \quad 0 \end{array}$$

由推论 1 即得 (iv).

(iv)⇒(i)：由 $\mathrm{rfd}(A)$ 的定义即得. □

由此定理立得如下推论.

推论 6　$\mathrm{rfd}(A) = \inf\{n \mid \mathrm{Tor}_{n+1}^R(A, B) = 0, \forall B \in {}_R\mathfrak{M}\}$

$\qquad = \inf\{n \mid \mathrm{Tor}_{n+j}^R(A, B) = 0, \forall B \in {}_R\mathfrak{M}, j \geqslant 1\}$

定理 9　设 R 为任意环，则下述各点等价：

(i) $\mathrm{rWD}(R) \leqslant n$；

(ii) $\mathrm{lWD}(R) \leqslant n$；

(iii) $\mathrm{Tor}_{n+1}^R(A, B) = 0, \forall A \in \mathfrak{M}_R, B \in {}_R\mathfrak{M}$.

因此，$\mathrm{rWD}(R) = \mathrm{lWD}(R)$. 今后不再加以区分，统一地记为 $\mathrm{WD}(R)$，称为 R 的**弱维数**（weak dimension）.

证　由定理 8 即得. □

定理 10 对任意环 R,

$$\mathrm{WD}(R) \leqslant \min\{\mathrm{LD}(R), \mathrm{rD}(R)\}$$

证 由定理 9 注意投射分解必为平坦分解即得. □

推论 7 若 $\mathrm{Ext}_R^n(A,B)=0, \forall A,B\in {}_R\mathfrak{M}$,或 $\forall A,B\in \mathfrak{M}_R$,则

$$\mathrm{Tor}_n^R(C,D)=0, \forall C\in \mathfrak{M}_R, D\in {}_R\mathfrak{M}.$$

证 由上节推论 3 与本节推论 6,用定理 10 即得证. □

为了简化 $\mathrm{WD}(R)$ 的计算,我们先证

命题 6 $B\in \mathrm{Flat}_R\mathfrak{M} \Leftrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(R/I,B)=0, \forall I \underset{r}{\lhd} R$

其中 $I \underset{r}{\lhd} R$ 表示 I 为 R 的右理想;

$B\in \mathrm{Flat}\mathfrak{M}_R \Leftrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(B,R/I)=0, \forall I \underset{l}{\lhd} R$,其中 $I \underset{l}{\lhd} R$ 表示 I 为 R 的左理想.

证 只需证第一个结论,第二个结论之证是类似的.

$\forall I \underset{r}{\lhd} R$,有 $\mathfrak{M}_R$ 正合列

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow R \longrightarrow R/I \longrightarrow 0$$

于是有长正合列

$$\mathrm{Tor}_1(R/I,B) \xrightarrow{\partial} I\otimes B \longrightarrow R\otimes B \longrightarrow R/I\otimes B \longrightarrow 0$$

由上章 §3 定理 7(用于 ${}_R\mathfrak{M}$)即知 $\mathrm{Tor}_1(R/I,B)=0, \forall I \underset{r}{\lhd} R \Leftrightarrow B\in \mathrm{Flat}_R\mathfrak{M}$. □

定理 11 对任意环 R,

$$\mathrm{WD}(R) = \sup_{\forall I \underset{r}{\lhd} R} \mathrm{rfd}(R/I) = \sup_{\forall J \underset{l}{\lhd} R} \mathrm{lfd}(R/J)$$

$$= \sup_{\forall \text{循环左(右)}R-\text{模}N} \mathrm{lfd}(N) = \sup_{\forall M\in \mathrm{f.g.}\, {}_R\mathfrak{M}(\mathfrak{M}_R)} \mathrm{lfd}(M)$$

证 用命题 6,仿上节定理 12 之证即得. □

现在我们来看看定理 10 中的不等式何时成为等式. 为此,回忆一下 Noether 环的概念. 我们称一切左(右)理想都是有限生成的环为左(右)Noether 环. 容易证明它们的下述特征性质.

命题 7　环 R 是左(右)Noether 的$\Leftrightarrow$任何有限生成的左(右)R-模的子模都是有限生成的.

证$\Leftarrow$: 注意 R 是循环左R-模,即知这是当然的.

$\Rightarrow$: 设 $M={}_R<x_1,\cdots,x_n>\in \mathrm{f.g.}{}_R\mathfrak{M}$, $S\underset{R}{<}M$. 用归纳法来证 $S\in \mathrm{f.g.}{}_R\mathfrak{M}$ 即可.

$n=1$ 时,有正合列

$$0\longrightarrow I\longrightarrow R\underset{1_R\mapsto x_1}{\longrightarrow} M\longrightarrow 0,\quad I\underset{l}{\lhd} R$$

于是 $M\simeq R/I$. 因此有 $I\subseteq J\underset{l}{\lhd} R$ 使 $S\simeq J/I$. 由 J 是有限生成的即知 S 也是有限生成的. 即 $n=1$ 时欲证的结论成立.

设 $n>1$ 且由 $n-1$ 个元素生成的左 R-模之一切子模都是有限生成的. 取 $M'=Rx_n$. 则 M/M' 由 $n-1$ 个元素 $\overline{x}_1,\overline{x}_2,\cdots,\overline{x}_{n-1}$ $(\overline{x}_j=x_j+M')$生成. 显然有正合列

$$\begin{array}{c}0\longrightarrow S\cap M'\longrightarrow S\longrightarrow S/(S\cap M')\longrightarrow 0\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \wr\| \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (S+M')/M'<M/M'\end{array}$$

因此 $S\cap M'<M'$ 与 $S/(S\cap M')\lesssim M/M'$ 都是有限生成的. 从而 S 也是有限生成的. □

由命题 7 立得对右 Noether 环相应结果也成立的下述推论.

推论 8　设 R 为左 Noether 环, $M\in \mathrm{f.g.}{}_R\mathfrak{M}$, 则

(i) M 有由有限生成投射模组成的投射分解,也有由有限生成平坦模组成的平坦分解;

(ii) $\mathrm{f.g.}{}_R\mathfrak{M}=\mathrm{f.p.}{}_R\mathfrak{M}$;

(iii) $\mathrm{f.g.P}_R\mathfrak{M}=\mathrm{f.g.Flat}_R\mathfrak{M}$.

证　(i) 是显见的(这里未要求分解长度是有限的).

(ii) 由上章 §3 推论 5 即得.

(iii) 由(ii)与上章 §3 命题 9 即得. □

至此,我们可得 Noether 环中弱维数与整体维数的重要关系,即

定理 12 (M. Auslander)

(i) 设 R 为左 Noether 环,则 $\mathrm{WD}(R)=\mathrm{lD}(R)\leqslant\mathrm{rD}(R)$;

(ii) 设 R 为右 Noether 环,则 $\mathrm{WD}(R)=\mathrm{rD}(R)\leqslant\mathrm{lD}(R)$.

证 由定理 10 与推论 8 即得. □

注 2 定理 12 已有一个很好的推广形式:

设环 R 的一切右理想都是 $\aleph_n$ 生成的($\aleph_{-1}=\mathrm{f.g.}$)则 $\mathrm{rD}(R)\leqslant\mathrm{WD}(R)+n+1$. 有兴趣的读者可参看 1973 年 B. L. Osofsky 的专著[Os,73].

WD(R)是度量 R 与弱维数为 0 的环之间的差距的同调不变量. 而弱维数为 0 的环类在理论上与应用上都是十分重要的. 我们用下述定理来刻画此类环以结束本节.

用一个广义逆条件先给出如下定义.

定义 3 设环 R 满足: $\forall r\in R$,必有 $r'\in R$ 使 $rr'r=r$(即 r 有(1)-广义逆),则称 R 为(von Neumann)**正则环**(VN **正则环**).

现来证明: $\mathrm{WD}(R)=0$ 的充要条件是 R 为正则环,同时给出一些重要的特征刻画.

定理 13 对任意环 R,下述各点是等价的:

(1) ${}_R\mathfrak{M}=\mathrm{Flat}_R\mathfrak{M}$,即,一切左 R-模都是平坦模;

(2) $\forall r\in R, r\in rRr$;

(3) R 为 VN 正则环;

(4) R 的一切左主理想都是 R 的直和项;

(5) R 的一切有限生成左理想都是 R 的直和项;

(6) $\forall I \underset{\mathrm{f.g.}\,l}{\lhd} R$,必有幂等元 $e^2=e\in R$ 使 $I=Re$;

(7) $\forall Ra$(R 的左主理想),必有幂等元 $e^2=e\in R$ 使 $Ra=Re$;

(8) $\mathrm{WD}(R)=0$;

(9) $\forall r\in R$,必有 $x\in R$ 使 $rxr=r$ 且 $xrx=x$,即,R 的每一元素都有(1,2)-广义逆.

$(j)'$ (j)中左改为右, Ra, Re 改为 $aR, eR, j=1,4,5,6,7$.

证 由于(2)是左右平等的,因此只要证明前九点的等价性.

(1)⇒(2): 只需证$(1)'$⇒(2). $\forall r\in R$,必有正合列

$$0 \longrightarrow rR \longrightarrow R \longrightarrow R/rR \longrightarrow 0$$

由 $rR\in \mathrm{Flat}\mathfrak{M}_R$ 用上章§3定理9知: $\forall I \underset{l}{\lhd} R$,必有

$$(rR)I = rR\cap RI = rR\cap I$$

取 $I=Rr$ 即得(注意 $rRRr = rRr, r\in rR\cap Rr$) $r\in rRr$.

(2)⇒(3) 是显见的.

(3)⇒(4): 由 $r=rr'r$ 知

$$(r'r)(r'r) = r'r\equiv e = e^2\in R$$

且 $1_R = e+(1_R-e), e(1_R-e)=0$,由第一章§6例4知

$$R = Re\oplus R(1_R-e)$$

但 $Re = Rr'r\subseteq Rr$,又 $r = r(r'r) = re$,于是 $Rr\subseteq Re$,故 $Rr = Re$.
这就证出了(4).

(4)⇒(5): 由归纳法只需证: $I = Rr_1 + Rr_2$ 为 R 的直和项.

事实上,由(4)有 $R = Rr_1\oplus J_1$,因此 $1_R = e+(1_R-e), e\in Rr_1\subseteq I$. 从而知 $Rr_1 = Re, e^2 = e$. 又 $r_2 = r_2e + r_2(1_R-e)$,因此 $Rr_2\subseteq Rr_2e + Rr_2(1_R-e)$,于是

$$I = Rr_1 + Rr_2\subseteq Re + Rr_2e + Rr_2(1_R-e) = Re + Rr_2(1_R-e)$$

但 $r_2(1_R-e) = r_2 - r_2e\in I$(注意 $r_2e\in I$),故

$$I = Re + Rr_2(1_R-e) \underset{(4)}{=\!=} Re + Rf, f^2 = f\in R$$

令 $g = e+(1_R-e)f$,则由

$$Rr_2(1_R-e) = Rf \Rightarrow fe = 0 \Rightarrow f(1_R-e) = f$$

于是有

$$g^2 = e^2 + (1_R-e)f(1_R-e)f + (1_R-e)fe = e^2 + (1_R-e)f = g$$

因此 Rg 为R 的直和项,下面只需证 $I = Rr_1 + Rr_2 = Rg$. 事实上,

$$eg = e \Rightarrow Rr_1 = Re\subseteq Rg$$

$$fg = fe + f(1_R-e)f = f^2 = f \Rightarrow Rf\subseteq Rg.$$

因此 $I = Re + Rf \subseteq Rg$. 但 $g = e + (1_R - e)f \in I$,故 $I = Rg$.

(5)⇒(6)是显见的.

(6)⇒(7)是当然的.

(7)⇒(6)⇒(5)已由上面"(4)⇒(5)"之证看出,因此(5),(6),(7)是等价的. 下证(5)⇒(1)即知前七点等价.

(5)⇒(1):只需证:$\forall M \in {}_R\mathfrak{M}, I \underset{r}{\lhd} R$,

$$I \underset{R}{\otimes} M \xrightarrow{\mu} IM$$

$$\sum i_j \otimes m_j \longmapsto \sum i_j m_j$$

为单同态.

设 $\sum_{j=1}^{n} i_j m_j = 0$. 令 $\langle i_1, \cdots, i_n \rangle_R = J \underset{r}{\lhd} R$. 由(6)(与(5)等价)知,有 $e^2 = e \in R$ 使 $J = eR$,因此有 x_j 使 $i_j = ex_j = e(ex_j)$. 于是

$$\sum_{j=1}^{n} i_j \otimes m_j = \sum_{j=1}^{n} e(ex_j) \otimes m_j = \sum_{j=1}^{n} e \otimes (ex_j) m_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} e \otimes i_j m_j = e \otimes \sum_{j=1}^{n} i_j m_j = 0$$

即 μ 必为单同态.

(8) ⇔(1)是已知结果.

(9)⇒(3)是当然的. 下面只需再证(3)⇒(9).

(3)⇒(9):设 $r = rr'r$,取 $x = r'rr'$,则

$$rxr = rr'rr'r = rr'r = r$$

$$xrx = r'rr'rr'rr' = r'rr'rr' = r'rr' = x \qquad \square$$

正则环(即(1)-广义逆环,也即(1,2)-广义逆环)的常见例子是域 F 上的矩阵环 $F^{n\times n}$,更一般的例子见本节习题 3.

习 题 3.4

1. 设 R 为整环,Q 为 R 的商域,$K = Q/R$.

(1) 证明:对任意的 $A \in {}_R\mathfrak{M}$,必有 ${}_R\mathfrak{M}$ 正合列

$$0 \longrightarrow TA \longrightarrow A \longrightarrow Q \underset{R}{\otimes} A \longrightarrow K \underset{R}{\otimes} A \longrightarrow 0$$

(2) 证明:$A \in {}_R\mathfrak{M}$ 为挠模$\Leftrightarrow Q \underset{R}{\otimes} A = 0$.

(建议:从正合列 $0 \longrightarrow R \longrightarrow Q \longrightarrow K \longrightarrow 0$ 入手).

2. 证明下述各点是等价的:

(1) $\forall I \underset{l}{\lhd} R, I \in \mathrm{Flat}_R\mathfrak{M}$;

(1)′ $\forall I \underset{r}{\lhd} R, I \in \mathrm{Flat}\mathfrak{M}_R$;

(2) $\mathrm{WD}(R) \leqslant 1$;

(3) $\mathrm{Tor}_2^R(A, B) = 0, \forall A \in \mathfrak{M}_R, B \in {}_R\mathfrak{M}$.

3. 设 R 为(Artin)半单环,$M \in {}_R\mathfrak{M}$. 证明 $\mathrm{End}_R M$ 必为 VN 正则环.

§5 泛系数定理及其应用

$\mathfrak{M}_R$ 中复形$\mathbb{K}$的同调模 $H_n(\mathbb{K})$事实上可看作是

$$H_n(\mathbb{K}) \simeq H_n(\mathbb{K} \underset{R}{\otimes} R) \simeq H_n(\mathbb{K}) \underset{R}{\otimes} R$$

其中$\mathbb{K} \underset{R}{\otimes} R$ 表示$- \underset{R}{\otimes} R$ 作用于$\mathbb{K}$ 所得的复形. 因此,当 $A \in \mathrm{Free}_R\mathfrak{M}$,即 $A \simeq \coprod R \in {}_R\mathfrak{M}$,时

$$H_n(\mathbb{K} \underset{R}{\otimes} A) \simeq H_n(\mathbb{K} \underset{R}{\otimes} \coprod R) \simeq H_n(\coprod(\mathbb{K} \underset{R}{\otimes} R))$$

$$\underset{\text{本章§1推论1}}{\simeq} \coprod H_n(\mathbb{K} \underset{R}{\otimes} R) \simeq H_n(\mathbb{K}) \underset{R}{\otimes} A$$

当 R 为除环(比如域)时,此同构对任意的 $A \in {}_R\mathfrak{M}$ 都成立,即 $H_n(\mathbb{K})$通过$\otimes$在 R 中取“系数”可归为在 A 中取“系数”. 这就是所谓“泛系数”. 遗憾的是,对一般的环 R 及一般的模 A 上述同构并不成立. 因此对一些常用的环类,寻求它们之间的差距就成了一个有意义的问题. 在历史上先研究$\mathbb{Z}$ 上,进而研究 PID 上的这一问题,现已有下面的重要定理.

定理 1 (同调泛系数定理,universal coefficient theorem for homology). 设 $\mathrm{rD}(R) \leqslant 1$(即 R 为右遗传环,比如$\mathbb{Z}$, PID),A

$\in {}_R\mathfrak{M}$,$(\mathbb{K},d)$为投射 $\mathfrak{M}_R$-复形(即一切 $K_n \in \mathrm{P}\,\mathfrak{M}_R$ 的复形),则有可裂正合列(可裂性未必自然):

$$0 \longrightarrow H_n(\mathbb{K}) \underset{R}{\otimes} A \overset{\lambda}{\rightarrowtail} H_n(\mathbb{K} \underset{R}{\otimes} A) \overset{\mu}{\twoheadrightarrow} \mathrm{Tor}_1^R(H_{n-1}(\mathbb{K}), A) \longrightarrow 0,$$

其中 λ,μ 都是自然的.因此

$$H_n(\mathbb{K} \underset{R}{\otimes} A) \simeq H_n(\mathbb{K}) \underset{R}{\otimes} A \oplus \mathrm{Tor}_1^R(H_{n-1}(\mathbb{K}), A)$$

证 对任意的 n,由 Z_n, B_{n-1}, H_{n-1} 的定义(见本章§1)得两个正合列

$$0 \longrightarrow Z_n(\mathbb{K}) \overset{i_n}{\rightarrowtail} K_n(\mathbb{K}) \overset{d_n}{\twoheadrightarrow} B_{n-1}(\mathbb{K}) \longrightarrow 0 \qquad (1)$$

$$0 \longrightarrow B_{n-1}(\mathbb{K}) \rightarrowtail Z_{n-1}(\mathbb{K} \twoheadrightarrow H_{n-1}(\mathbb{K}) \longrightarrow 0 \qquad (2)$$

将(1),(2)拼接起来($K_n \overset{d_n}{\twoheadrightarrow} B_{n-1} \rightarrowtail Z_{n-1}$ 合成为 $K_n \overset{d_n}{\longrightarrow} Z_{n-1}$)得正合列(括号内的$\mathbb{K}$均省去以求醒目):

$$0 \longrightarrow Z_n \rightarrowtail K_n \overset{d_n}{\longrightarrow} Z_{n-1} \twoheadrightarrow H_{n-1} \longrightarrow 0 \qquad (3)$$

由 $K_n \in \mathrm{P}\,\mathfrak{M}_R$, $\forall n$ 及 $\mathrm{rD}(R) \leqslant 1$ 知,K_n 的子模 Z_n,K_{n-1} 的子模 B_{n-1} 都是投射的.因此(1)是可裂的且(2),(3)均为 K_{n-1} 的投射分解.记(3)给出的 H_{n-1} 之删项投射分解为$\mathbb{L}$,则得复形

$$\mathbb{L} \otimes \mathrm{A} = \qquad 0 \longrightarrow \mathbb{Z}_n \otimes A \xrightarrow{i_n \otimes I_A} K_n \otimes A \xrightarrow{d_n \otimes I_A} Z_{n-1} \otimes A \longrightarrow 0,$$

其同调模

$$H_j(\mathbb{L} \otimes A) = \mathrm{Tor}_j(H_{n-1}, A)$$

其中 $H_{n-1} = H_{n-1}(\mathbb{K})$.

由(1)可裂知 $i_n \otimes I_A$ 为单同态,因此可设

$$Z_n \otimes A < K_n \otimes A$$

于是有

$\mathrm{Tor}_1(H_{n-1}, A) = H_1(\mathbb{L} \otimes A) = \mathrm{Ker}(d_n \otimes I_A)/\mathrm{Im}(i_n \otimes I_A) \simeq \mathrm{Ker}(d_n \otimes I_A)/Z_n \otimes A$

$\mathrm{Tor}_0(H_{n-1}, A) \simeq H_{n-1} \otimes A \simeq H_0(\mathbb{L} \otimes A) \simeq Z_{n-1} \otimes A/\mathrm{Im}(d_n \otimes I_A)$

现考察$\mathbb{K}$的一段

$$K_{n+1}\xrightarrow{d_{n+1}}K_n\xrightarrow{d_n}K_{n-1}$$

得

$$\mathrm{Im}(d_{n+1}\otimes I_A)<Z_n\otimes A<\mathrm{Ker}(d_n\otimes I_A)<K_n\otimes A$$

由模的第三同构定理知

$$\Big(\mathrm{Ker}(d_n\otimes I_A)/\mathrm{Im}(d_{n+1}\otimes I_A)\Big)\Big/\Big(Z_n\otimes A/\mathrm{Im}(d_{n+1}\otimes I_A)\Big)$$
$$\simeq\mathrm{Ker}(d_n\otimes I_A)/Z_n\otimes A$$

由此得带正合行的交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
0\longrightarrow & Z_n\otimes A/\mathrm{Im}(d_{n+1}\otimes I_A) & \xrightarrow{\lambda'} & \mathrm{Ker}(d_n\otimes I_A)/\mathrm{Im}(d_{n+1}\otimes I_A) & \xrightarrow{\mu'} & \mathrm{Ker}(d_n\otimes I_A)/Z_n\otimes A & \longrightarrow 0\\
 & \downarrow\simeq & & \downarrow\simeq & & \downarrow\simeq & \\
0\longrightarrow & H_n(\mathbb{K})\otimes A & \xrightarrow{\lambda} & H_n(\mathbb{K}\otimes A) & \xrightarrow{\mu} & \mathrm{Tor}_1(H_{n-1}(\mathbb{K}),A) & \longrightarrow 0
\end{array}$$

而(1)可裂$\Rightarrow Z_n$ 为K_n 的直和项$\Rightarrow Z_n\otimes A$ 为$K_n\otimes A$ 的直和项$\underset{Z_n\otimes A<\mathrm{Ker}(d_n\otimes I_A)<K_n\otimes A}{\Longrightarrow}Z_n\otimes A$ 为 $\mathrm{Ker}(d_n\otimes I_A)$的直和项

$\Rightarrow Z_n\otimes A/\mathrm{Im}(d_{n+1}\otimes I_A)$为 $\mathrm{Ker}(d_n\otimes I_A)/\mathrm{Im}(d_{n+1}\otimes I_A)$的直和项

$\Rightarrow$上图下行为可裂的.

λ,μ 的自然性可直接验证. □

定理 1 有许多重要的应用.我们以推论形式写出几个来.

推论 1 设 X 为一个拓扑空间,G 为一个 Abel 群,则对一切 n,

$$H_n(X;G)\equiv H_n(S(X)\underset{\mathbb{Z}}{\otimes}G)\simeq H_n(X)\underset{\mathbb{Z}}{\otimes}G\oplus\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(X),G),$$

其中 $H_n(X)=H_n(S(X))$,$S(X)$为 X 的奇异复形(singular complex)也称为连续复形.

证 注意 $S(X)$为自由 Abel 群复形,即自由$\mathbb{Z}$-模复形,因此是投射$\mathbb{Z}$-模复形.又 $\mathrm{rD}(\mathbb{Z})\leqslant 1$,$G\in{}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M}$.由定理 1 即得欲证. □

注 1 在代数拓扑中有一个有趣的结果:任给 Abel 群 $A_0, A_1, A_2, \cdots$,必有一个拓扑空间 X 使 $H_n(X) \simeq A_n$. 此外,对一个交换环 R 的理想 I 以及 R-模 M,容易验证

$$R/I \underset{R}{\otimes} M \longrightarrow M/IM$$
$$(r+I) \otimes m \longmapsto rm + IM$$

为一个 R-模同构. 取 $M = R/L, L \lhd R$,则得 R-模同构

$$R/I \underset{R}{\otimes} R/L \simeq (R/L)/(I+L)/L \simeq R/(I+L)$$

由此知

$$\mathbb{Z}_m \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}_{(m,n)}$$

用此结果以及上节推论 4 可对大量的拓扑空间 X 算出推论 1 中右端的两项,从而算出 $H_n(X;G)$来.

推论 2 设 R 为域,$\mathbb{K}$ 为${}_R\mathfrak{M}$复形, $V \in {}_R\mathfrak{M}$,则对一切 n 有

$$H_n(\mathbb{K} \underset{R}{\otimes} V) \simeq H_n(\mathbb{K}) \otimes V$$

即,

$$H_n(\amalg \mathbb{K}) \simeq \amalg H_n(\mathbb{K})$$

(这正是本章 §1 推论 1 的特殊情况). □

推论 3 设$\mathbb{K}$ 为自由 Abel 群复形. 若 $H_{n-1}(\mathbb{K})$或 A 为无挠 Abel 群,则

$$H_n(\mathbb{K} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} A) \simeq H_n(\mathbb{K}) \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} A$$

证 由定理 1 知,只需证

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(\mathbb{K}), A) = 0$$

为此,我们只需证:无挠 Abel 群(即无挠$\mathbb{Z}$-模)必为平坦$\mathbb{Z}$-模.

事实上,由上节推论 5 知,无挠$\mathbb{Z}$-模必可嵌入到一个平坦$\mathbb{Z}$-模中,由于 $\mathrm{gD}(\mathbb{Z}) \leqslant 1$, $\mathrm{WD}(\mathbb{Z}) \leqslant \mathrm{gD}(\mathbb{Z}) \leqslant 1$,因此无挠$\mathbb{Z}$-模作为平坦$\mathbb{Z}$-模的子模必为平坦的. □

由此证的启发,我们顺便得一结果:

命题 1 设 R 为整环,且 $\mathrm{gD}(R) \leqslant 1$(即 R 为 Dedekind 整环,

如 PID),则 $M\in \text{Flat}_R\mathfrak{M}$ 的充要条件是 M 为无挠 R－模.

证　$\Leftarrow$:仿推论 3 之证即得.

$\Rightarrow$:由 $M\in \text{Flat}_R\mathfrak{M}$ 知(见上章 §3),对任意的以自由模 F 作中间模的正合列(这种正合列当然是存在的)

$$0\longrightarrow K\longrightarrow F\xrightarrow{\varphi} M\longrightarrow 0\quad (K\subseteq F)$$

$$K\cap IF=IK,\quad \forall I\lhd R$$

若有 $0\neq r\in R, m\in M$ 使 $rm=0$,只需证 $m=0$ 即可.

事实上,由 φ 为满同态知必有 $x\in F$ 使 $\varphi(x)=m$. 于是 $\varphi(rx)=rm=0$. 由此知,$rx\in K\cap rF\subseteq K\cap(rR)F=(rR)K=rK$. 即有 $k\in K$ 使 $rx=rk$,即 $r(x-k)=0$. 所以由 $x-k\in F$,F 为自由 R－模,以及 R 无零因子即知 $x=k\in K$,从而 $m=\varphi(x)=0$. □

注 2　上证的"$\Rightarrow$"部分事实上已证出:对无零因子环(未必为交换环)R,平坦 R－模必为无挠的. 又,更一般地可证:若 R 为 Prüfer 环(即半遗传整环),命题 1 仍成立.

用反变函子 $\text{Hom}_R(-,A)$ 代替共变函子 $-\underset{R}{\otimes}A$,用定理 1 证法的对偶方法可得上同调的相应结果,即

定理 2(上同调泛系数定理,universal coefficient theorem for cohomology)　设 R 为右遗传环(即 $\text{rD}(R)\leqslant 1$),$(\mathbb{K},d)$ 为投射右 R－模复形,$A\in\mathfrak{M}_R$,则有可裂正合列(可裂性未必自然)

$$0\longrightarrow \text{Ext}_R^1(H_{n-1}(\mathbb{K}),A)\xrightarrow{\lambda} H^n(\text{Hom}_R(\mathbb{K},A))\twoheadrightarrow \text{Hom}_R(H_n(\mathbb{K}),A)\longrightarrow 0,\ \forall n$$

其中 λ,μ 是自然的. 因此

$$H^n(\text{Hom}_R(\mathbb{K},A))\simeq \text{Hom}_R(H_n(\mathbb{K}),A)\oplus \text{Ext}_R^1(H_{n-1}(\mathbb{K}),A),\ \forall n$$

由此定理可得如下有用的推论.

推论 4　设 X 为拓扑空间,G 为 Abel 群,则

$$H^n(X,G)\simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_n(X),G)\oplus \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(H_{n-1}(X),G)$$

其中

$$H^n(X,G)\equiv H^n(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(S_n(X),G))$$

证 仿推论 1 的分析用定理 2 即得. □

推论 5 设 R 为域,$\mathbb{K}$ 为${}_R\mathfrak{M}$ 复形,$V\in{}_R\mathfrak{M}$,则

$$H^n(\mathrm{Hom}_R(\mathbb{K},V))\simeq\mathrm{Hom}_R(H_n(\mathbb{K}),V)$$

因此

$$H^n(\mathrm{Hom}_R(\mathbb{K},R))\simeq H_n(\mathbb{K})^*$$

其中"$*$"是对偶模(空间)记号.上述结果也可表成 $H^n(\mathbb{K})^*\simeq H_n(\mathbb{K})^*$ ($\mathbb{K}^*$ 称为$\mathbb{K}$ 的对偶复形). □

推论 6 设$\mathbb{K}$ 为自由 Abel 群复形,若 $H_{n-1}(\mathbb{K})$是自由 Abel 群或 A 为可除 Abel 群,则

$$H^n(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{K},A)\simeq\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_n(\mathbb{K}),A).$$

证 由 $H_{n-1}(\mathbb{K})\in\mathrm{Free}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M}\subset\mathrm{P}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M}$ 知 $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(\mathbb{K}),A)=0$,由 $A\in\mathrm{Div}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M}\xlongequal[\text{上章§2}]{}\mathrm{Inj}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M}$ 也可知 $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(\mathbb{K}),A)=0$.于是由定理 2 即得欲证. □

由上可看出计算 $\mathrm{Tor}_1,\mathrm{Ext}^1$ 或给出使它们为 0 的条件是有应用价值的.

现在很自然地要问:定理 1、定理 2 中的 R-模 A 改成R-模复形$\mathbb{A}$后,能否得到类似的结果?这当然首先要定义两个复形$\mathbb{K}$,$\mathbb{A}$ 的张量积,以及两个复形$\mathbb{K}$,$\mathbb{A}$ 的$\mathbb{H}\mathrm{om}$(这里不用 Hom 是为防止与$\mathbb{K}$,$\mathbb{A}$ 间的链映射集 $\mathrm{Hom}(\mathbb{K},\mathbb{A})$相混).这里的$\mathbb{K}\underset{R}{\otimes}\mathbb{A}$ 与$\mathbb{H}\mathrm{om}_R(\mathbb{K},\mathbb{A})$都要求是复形,否则不能定义它们的同调与上同调.

先介绍分次模与双分次模的概念.

定义 1 一个左(右)R-模的序列 $M=\{M_p\mid p\in\mathbb{Z}\}$称为**分次左(右)$R$-模**(graded left (right) R-module),记为 $\mathrm{G}_R\mathfrak{M}$.

若 $M=\{M_p\},N=\{N_p\}\in\mathrm{G}_R\mathfrak{M}$,则模同态列

$$f=\{f_p:M_p\longrightarrow N_{p+a}\},\quad a\in\mathbb{Z}$$

称为 a 次的**分次模同态**,记成 $f:M\longrightarrow N$,$\deg f=a$.这里的 a 是

由 f 决定的一个整数,可正,可负,也可以为 0.

例如$_R\mathfrak{M}$ 上的复形

$$\mathbb{C}=\cdots\longrightarrow C_p\xrightarrow{d_p}C_{p-1}\xrightarrow{d_{p-1}}C_{p-2}\longrightarrow\cdots$$

就给出一个分次 R - 模 $C=\{C_p\}$,而 $d=\{d_p\}$ 为 -1 次的分次模 C 的自同态,复形间的链映射可看作是零次的分次模同态.

此外,同调模列、Ext 列与 Tor 列(取定一个变元时)都可看作是分次模,连接同态则为 +1 次或 −1 次的分次模同态.

定义 2 一个$_R\mathfrak{M}$(或 $\mathfrak{M}_R$)的序列 $M=\{M_{pq}\mid p,q\in\mathbb{Z}\}$ 称为双分次左 R - 模,简称为**双分次模**(bigraded module),记为 $M\in \mathrm{BG}_R\mathfrak{M}$.

若 $M=\{M_{pq}\},N=\{N_{pq}\}\in\mathrm{BG}_R\mathfrak{M},a,b\in\mathbb{Z}$,则称$_R\mathfrak{M}$ 同态列

$$f=\{f_{pq}:M_{pq}\longrightarrow N_{p+a,q+b}\}$$

是双次数为(a,b)的**双分次模同态**,记为

$$f:M\longrightarrow N,\quad \mathrm{bideg}f=(a,b)$$

容易看出,$\mathrm{G}_R\mathfrak{M}$,$\mathrm{BG}_R\mathfrak{M}$ 都构成范畴,分别称为分次左 R - 模范畴与双分次左 R - 模范畴.

从上面已看出,复形与分次模有密切的关系.现在对双分次模来定义双复形.

定义 3 设 $M=\{M_{pq}\}\in\mathrm{BG}_R\mathfrak{M}$, $d',d'':M\to M$, $\mathrm{bideg}d'=(-1,0)$, $\mathrm{bideg}d''=(0,-1)$且满足

(1) $d'_{p-1,q}d'_{pq}=0,\forall p,q\in\mathbb{Z}$,即各行($q$ 固定)成复形;

(2) $d''_{p,q-1}d''_{pq}=0,\forall p,q\in\mathbb{Z}$,即各列($p$ 固定)成复形;

(3) $d'_{p,q-1}d''_{pq}+d''_{p-1,q}d'_{pq}=0,\forall p,q\in\mathbb{Z}$,即每一方格图都是“反交换”的.

则称 M 为$_R\mathfrak{M}$ 上的一个**双复形**(bicomplex;double complex).

$$
M=\left\{\begin{array}{ccccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\cdots & \longrightarrow & M_{p+1,q+1} & \longrightarrow & M_{p,q+1} & \longrightarrow & M_{p-1,q+1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\cdots & \longrightarrow & M_{p+1,q} & \longrightarrow & M_{p,q} & \xrightarrow{d'_{pq}} & M_{p-1,q} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d''_{pq}} & & \downarrow{\scriptstyle d''_{p-1,q}} & & \\
\cdots & \longrightarrow & M_{p+1,q-1} & \longrightarrow & M_{p,q-1} & \xrightarrow{d'_{p,q-1}} & M_{p-1,q-1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}\right.
$$

注 3 上述的条件(3)可改为

$(3)':d'_{p,q-1}d''_{pq}=d''_{p-1,q}d'_{pq}.$

这只要将原来的 d'_{pq} 都换成 $(-1)^p d'_{pq}$ 即可. 对(3)′而言,它意味着上图每一方格都可换,即上图为交换图. 但为了以后使用的方便,我们仍用(3).

由定义 3 知:双复形即行、列都成复形且每个方格反交换的"二维"复形. 为了计算同调,我们需将双复形加工出一个复形来. 当然,我们希望得到的复形比双复形中任一个行(列)复形更能较全面地反映出双复形的:"内在信息". 于是我们引进如下定义.

定义 4 设 $M=\{M_{pq}\}$ 为双复形,记

$$\mathrm{Tot}(M)_n=\coprod_{p+q=n}M_{pq}\quad(\text{即沿“}45^\circ\text{线”取直和})$$

$$d_n=\sum_{p+q=n}(d'_{pq}+d''_{pq}):\mathrm{Tot}(M)_n\longrightarrow\mathrm{Tot}(M)_{n-1}$$

容易验知 $d_{n-1}d_n=0$. 因此组成一个复形,称为双复形 M 的**全复形**(total complex). 记为 $\mathrm{Tot}(M)$.

注 4 验证 $d_{n-1}d_n=0$ 时,读者会发现定义 3 中用(3)比用(3)′更方便.

现在来定义复形的张量积.

定义 5 设$\mathbb{K}=\{K_p,d'_p\}$为 $\mathfrak{M}_R$ 复形,$\mathbb{A}=\{A_q,d''_q\}$为${}_R\mathfrak{M}$

复形,令 $M_{pq}=K_p\underset{R}{\otimes}A_q$, $d'_{pq}=d'_p\otimes I_{A_q}$, $d''_{pq}=(-1)^p I_{K_p}\otimes d''_q$,则 $M=\{M_{pq},d'_{pq},d''_{pq}\}$ 为双复形. 称 M 的全复形 $\mathrm{Tot}(M)$ 为$\mathbb{K}$与$\mathbb{A}$这两个复形的张量积,记为$\mathbb{K}\underset{R}{\otimes}\mathbb{A}$. 即,

$$(\mathbb{K}\underset{R}{\otimes}\mathbb{A})_n=\coprod_{p+q=n}K_p\underset{R}{\otimes}A_q$$

$$d_n:(\mathbb{K}\underset{R}{\otimes}\mathbb{A})_n\longrightarrow(\mathbb{K}\underset{R}{\otimes}\mathbb{A})_{n-1}$$

$$k_p\otimes a_q\longmapsto\sum_{p+q=n}(d'_p(k_p)\otimes a_q+(-1)^p k_p\otimes d''_q(a_q))$$

例如对 $M\in\mathfrak{M}_R$, $N\in{}_R\mathfrak{M}$ 的删项投射分解所成的复形$\mathbb{P}_{\hat{M}}$与$\mathbb{P}_{\hat{N}}$,可用定义 5 得$\mathbb{P}_{\hat{M}}\underset{R}{\otimes}\mathbb{P}_{\hat{N}}$. 这一复形来自"第一象限"双复形($p<0$ 或 $q<0$ 时 $M_{pq}=0$ 的双复形 $M=\{M_{pq},d'_{pq},d''_{pq}\}$ 被形象化地称为第一象限双复形,同样地可定义第二、三、四象限双复形). 因此,

$(\mathbb{P}_{\hat{M}}\underset{R}{\otimes}\mathbb{P}_{\hat{N}})_n=\coprod_{p+q=n}P_p\underset{R}{\otimes}Q_q$ (P_p, Q_q 分别为$\mathbb{P}_{\hat{M}}$与$\mathbb{P}_{\hat{N}}$中的投射模)都是有限直和.

复形张量积的概念也是来自拓扑学. 在拓扑学中 Eilenberg－Zilber 定理断言:若 X, Y 为拓扑空间, $S(X)$, $S(Y)$各为它们的奇异复形,则

$$H_n(X\times Y)\simeq H_n(S(X)\otimes S(Y))$$

右端出现的就是复形的张量积.

类似地可定义$\mathrm{Hom}_R(\mathbb{K},\mathbb{A})$如下.

定义 6 设$\mathbb{K}=\{K_p,d'_p\}$, $\mathbb{A}=\{A_q,d''_q\}$均为${}_R\mathfrak{M}$(或 $\mathfrak{M}_R$)上的复形,令(为照顾 $\mathrm{Hom}_R(-,A_q)$的反变性,用 K_{-p}代K_p)

$$M_{pq}=\mathrm{Hom}_R(K_{-p},A_q)$$

$$d'_{pq}=(d'_{-p+1})^*:\mathrm{Hom}_R(K_{-p},A_q)\longrightarrow\mathrm{Hom}_R(K_{-p+1},A_q)$$

$$d''_{pq}=(-1)^{p+q+1}(d''_q)_*:\mathrm{Hom}_R(K_{-p},A_q)\longrightarrow\mathrm{Hom}_R(K_{-p},A_{q-1})$$

则得双复形

$M=\{M_{pq},d'_{pq},d''_{pq}\}=\{\mathrm{Hom}_R(K_{-p},A_q),(d'_{-p+1})^*,$

$(-1)^{p+q+1}(d''_q)_*\}$

记 M 的全复形为

$$\mathbb{H}\mathrm{om}_R(\mathbb{K},\mathbb{A})=\{\mathbb{H}\mathrm{om}_R(\mathbb{K},\mathbb{A})_n, D_n\}$$

其中

$$\mathbb{H}\mathrm{om}_R(\mathbb{K},\mathbb{A})_n=\prod_{p+q=n}\mathrm{Hom}_R(K_{-p},A_q)\left(=\prod_{q-p=n}\mathrm{Hom}_R(K_p,A_q)\right)$$

$$=\prod_p \mathrm{Hom}_R(K_p,A_{p+n})$$

$$D_n:\mathbb{H}\mathrm{om}_R(\mathbb{K},\mathbb{A})_n\longrightarrow \mathbb{H}\mathrm{om}_R(\mathbb{K},\mathbb{A})_{n-1}$$

$$f=(f_{pq})\longmapsto D_n(f)=(g_{pq})$$

$$g_{pq}:K_{-p}\longrightarrow A_g\ (p+q=n-1)\text{为}$$

$$g_{pg}=(-1)^{p+q}f_{p+1,q}d'_{-p}+d''_{q+1}f_{p,q+1}$$

事实上,可以验证

$$D_n=(-1)^{n+1}\prod_{p+q=n}(d'_{pq}+d''_{pq})$$

注 5 对 $\mathfrak{M}_R$ 上的复形$\mathbb{A}$,${}_R\mathfrak{M}_S$ 上的复形$\mathbb{B}$,$\mathfrak{M}_S$ 上的复形$\mathbb{C}$,可证复形的伴随同构定理

$$\mathbb{H}\mathrm{om}_S(\mathbb{A}\bigotimes_R\mathbb{B},\mathbb{C})\simeq\mathbb{H}\mathrm{om}_R(\mathbb{A},\mathbb{H}\mathrm{om}_S(\mathbb{B},\mathbb{C}))$$

对${}_R\mathfrak{M}$ 上的复形$\mathbb{A}$,${}_S\mathfrak{M}_R$ 上的复形$\mathbb{B}$,${}_S\mathfrak{M}$ 上的复形$\mathbb{C}$,类似地有

$$\mathbb{H}\mathrm{om}_S(\mathbb{B}\bigotimes_R\mathbb{A},\mathbb{C})\simeq\mathbb{H}\mathrm{om}_R(\mathbb{A},\mathbb{H}\mathrm{om}_S(\mathbb{B},\mathbb{C}))$$

上面介绍的概念与方法是谱序列(spectral sequence)理论的基础.有了上述准备,即可介绍泛系数定理的推广形式——Künneth 定理(在代数拓扑中 $\mathrm{Tor}_1(A,B)$常记为 $A*B$).

定理 3(Künneth 定理) 设$\mathbb{K}$ 为 $\mathfrak{M}_R$ 上的复形,其循环 Z_p 与边界B_p 都是平坦的,$\mathbb{A}$ 为${}_R\mathfrak{M}$ 上的任一复形,则有短正合列

$$0\longrightarrow\prod_{p+q=n}H_p(\mathbb{K})\bigotimes_R H_q(\mathbb{A})\xrightarrow{\alpha}H_n(\mathbb{K}\bigotimes_R\mathbb{A})\xrightarrow{\beta}\prod_{p+q=n-1}\mathrm{Tor}_1^R$$
$$(H_p(\mathbb{K}),H_q(\mathbb{A}))\longrightarrow 0$$

其中 $\alpha:[k]\otimes[a]\longmapsto[k\otimes a]$, $\forall\, k\in Z_p(\mathbb{K})$, $a\in Z_q(\mathbb{A})$,[ ]表同

调类.

此外,上述的 α,β 对$\mathbb{K}$,$\mathbb{A}$都是自然的.

作为定理 3 的应用,我们可证明如下结果.

推论 7(Künneth 张量积公式,Künneth tensor formula)

设$\mathbb{K}$为 $\mathfrak{M}_R$ 上的复形,$Z_p(\mathbb{K})$与 $H_p(\mathbb{K})$都是投射的,则对任意的$_R\mathfrak{M}$上的复形$\mathbb{A}$与 n 有

$$\coprod_{p+q=n} H_p(\mathbb{K})\bigotimes_R H_q(\mathbb{A})\overset{\alpha}{\simeq}H_n(\mathbb{K}\bigotimes_R \mathbb{A})$$

其中 α 如定理 3 中所示.

证 由 $H_p(\mathbb{K})$投射知

$$0\longrightarrow B_p(\mathbb{K})\longrightarrow Z_p(\mathbb{K})\longrightarrow H_p(\mathbb{K})\longrightarrow 0$$

为可裂正合列,因此 $B_p(\mathbb{K})$为 $Z_p(\mathbb{K})$的直和项.于是由 $Z_p(\mathbb{K})$是投射的知 $B_p(\mathbb{K})$也是投射的.由此知它们都是平坦的,又由 $H_p(\mathbb{K})$投射知

$$\mathrm{Tor}_1^R(H_p(\mathbb{K}),H_q(\mathbb{A}))=0,\quad \forall p,q$$

故由定理 3 即得欲证. □

推论 8 (代数拓扑中的 Künneth 定理).

设 $R\in\mathrm{PID}$(比如$\mathbb{Z}$);$\mathbb{K}$,$\mathbb{A}$为$_R\mathfrak{M}$上的复形,且$\mathbb{K}$,$\mathbb{A}$之一为平坦的(即由平坦模组成的复形),则有定理 3 中的可裂短正合列,且 α,β 为自然的(可裂性未必自然).

证 注意 R 为交换环,当然有

$$\mathbb{K}\bigotimes_R\mathbb{A}\simeq\mathbb{A}\bigotimes_R\mathbb{K}$$

因此不失一般地可设$\mathbb{K}$为平坦的.

由 $R\in\mathrm{PID}$ 知 $\mathrm{WD}(R)\leqslant\mathrm{gD}(R)\leqslant 1$,因此平坦 R-模的子模仍是平坦的,由此知 $Z_p(\mathbb{K})$,$B_p(\mathbb{K})$都是平坦的.用定理 3 即得证. □

注 6 推论 8 中如果只有条件"$R\in\mathrm{PID}$",结论未必成立.

例 1 取 $R=\mathbb{Z}$,$\mathbb{K}=\mathbb{Z}_2=\mathbb{A}$(一个模可看作是平凡的复形).

$$\mathbb{K}'_p=\begin{cases}\mathbb{Z}=\langle t\rangle, & p=0\text{ 时}\\ \mathbb{Z}=\langle s\rangle, & p=1\text{ 时}\\ 0\quad, & p\neq 0,1\text{ 时}\end{cases}$$

$\mathbb{K}'$的微分算子 d_1 定义为 $ds=2t$,则

$$H_p(\mathbb{K})=H_p(\mathbb{K}'),\quad \forall p$$

但

$$H_1(\mathbb{K}\bigotimes_R\mathbb{A})\simeq\mathbb{Z}_2\neq 0\simeq H_1(\mathbb{K}'\bigotimes_R\mathbb{A})$$

显然地,设 R 为交换环,$\mathrm{WD}(R)\leqslant 1$ 时推论 8 中的结论仍成立.

推论 8 可被推广为下述定理.

定理 4(Künneth 同调公式)设 $\mathrm{rD}(R)\leqslant 1$(即 R 为右遗传环),$\mathbb{K}$ 为 $\mathfrak{M}_R$ 上的复形且$\mathbb{K}$是平坦的,$\mathbb{A}$ 为${}_R\mathfrak{M}$ 上的复形,则有自然的正合列(即 α,β 为自然的)

$$0\longrightarrow\coprod_{p+q=n}H_p(\mathbb{K})\bigotimes_R H_q(\mathbb{A})\xrightarrow{\alpha}H_n(\mathbb{K}\bigotimes_R\mathbb{A})\xrightarrow{\beta}\coprod_{p+q=n-1}$$
$$\mathrm{Tor}_1^R(H_p(\mathbb{K}),H_q(\mathbb{A}))\longrightarrow 0,$$

且此列为可裂的(可裂性未必自然)

事实上,由推论 8 之证知定理 4 中除可裂性外,其余结论都可由定理 3 立即得出. 显然,定理 4 完全推广了定理 1(同调泛系数定理).

对偶于定理 4,有上同调的 Künneth 公式:

定理 5(Künneth 上同调公式) 设 $\mathrm{lD}(R)\leqslant 1$,即 R 为左遗传环(或 $\mathrm{rD}(R)\leqslant 1$,即 R 为右遗传环),$\mathbb{K}$ 为投射的${}_R\mathfrak{M}(\mathfrak{M}_R)$上的复形,$\mathbb{A}$ 为${}_R\mathfrak{M}(\mathfrak{M}_R)$上的复形,则有自然的正合列

$$0\longrightarrow\coprod_{q-p=n+1}\mathrm{Ext}_R^1(H_p(\mathbb{K}),H_q(\mathbb{A}))\longrightarrow H^n(\mathrm{Hom}_R(\mathbb{K},$$
$$\mathbb{A}))\longrightarrow\coprod_{q-p=n}\mathrm{Hom}(H_p(\mathbb{K}),H_q(\mathbb{A}))\longrightarrow 0,$$

且此列可裂(可裂性未必自然).

由定理 4 及交换环上$\otimes$在同构意义下的交换性与结合性,用

$A, B, C \in {}_R\mathfrak{M}$ 的删项投射分解立得

推论 9　设 R 为交换的遗传环，A、B、$C \in {}_R\mathfrak{M}$，则

$$\mathrm{Tor}_1^R(A, B) \underset{R}{\otimes} C \oplus \mathrm{Tor}_1^R(A \underset{R}{\otimes} B, C) \simeq A \underset{R}{\otimes} \mathrm{Tor}_1^R(B, C) \oplus \mathrm{Tor}_1^R(A, B \underset{R}{\otimes} C)$$

$$\mathrm{Tor}_1^R(\mathrm{Tor}_1^R(A, B), C) \simeq \mathrm{Tor}_1^R(A, \mathrm{Tor}_1^R(B, C))$$

由定理 5，用相伴定理可证下述结果．

推论 10　设 R 为交换的遗传环，A、B、$C \in {}_R\mathfrak{M}$，则

$$\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Tor}_1^R(A, B), C) \oplus \mathrm{Ext}_R^1(A \underset{R}{\otimes} B, C) \simeq \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Ext}_R^1(B, C)) \oplus \mathrm{Ext}_R^1(A, \mathrm{Hom}_R(B, C))$$

$$\mathrm{Ext}_R^1(\mathrm{Tor}_1^R(A, B), C) \simeq \mathrm{Ext}_R^1(A, \mathrm{Ext}_R^1(B, C))$$

本节中的上述结果都是代数拓扑中相应结果的推广，它们在代数拓扑中都有重要应用．

习　题　3.5

1. 设$\mathbb{A}$为 $\mathfrak{M}_R$ 上的平坦复形，其微分为零微分，$\mathbb{C}$ 为${}_R\mathfrak{M}$ 上的复形，证明：

$$H_n(\mathbb{A} \underset{R}{\otimes} \mathbb{C}) \simeq (\mathbb{A} \underset{R}{\otimes} H_*(\mathbb{C}))_n$$

其中 $H_*(\mathbb{C})$表示带零微分的复形$\{H_n(\mathbb{C})\}$．

2. 用定理 4 详细写出推论 9 的证明．

3. 用定理 5 详细写出推论 10 的证明．

第四章　谱　序　列

谱序列(spectral sequence)是计算同调(上同调)最有力的工具之一,也是论证同调性质最简单的工具之一.在某种意义下,它可看成是长正合列的推广.此外,谱序列还能给出一些有用的正合列.

谱序列是1946年J. Leray对纤维丛的拓扑研究中创立的(见[Le,46]),1947年由J. L. Koszul在[Ko, 47]中首次地将它代数化,现在已成为同调代数、代数拓扑、代数几何、环论及群论等学科的一种有力的工具.但尽管已有多种谱序列"公式"(收敛式)给出,用作计算或论证十分简捷、方便,遗憾的是,谱序列理论比较抽象,不易为初学者接受.因此,本章中我们先从思想方法的角度入手引出谱序列的概念,然后由复形、双复形等通过过滤的方法给出谱序列,再介绍Grothendieck用复合函子的方法给出的谱序列,最后介绍它的一些应用.

本章中的R,在未加特别声明时,总表示一个有单位元的任意环.

§1　过滤与谱序列

设$\mathbb{C}$为一个R-模复形,$\mathbb{C}'$为$\mathbb{C}$的子复形,则有R-模复形正合列

$$0\to\mathbb{C}'\to\mathbb{C}\to\mathbb{C}/\mathbb{C}'\to 0$$

由长正合列定理(上章§1定理3)知,必有正合列

$$\cdots\to H_n(\mathbb{C}')\to H_n(\mathbb{C})\to H_n(\mathbb{C}/\mathbb{C}')\xrightarrow{\partial} H_{n-1}(\mathbb{C}')\to$$

$$H_{n-1}(\mathbb{C}/\mathbb{C}')\to\cdots$$

因此,由 $H_*(\mathbb{C}')$ 与 $H_*(\mathbb{C}/\mathbb{C}')$ 可给出 $H_*(\mathbb{C})$ 的一些信息.更一般地,若有复形 $\mathbb{C}$ 的子复形升链

$$\cdots\subset F^{p-1}\mathbb{C}\subset F^p\mathbb{C}\subset F^{p+1}\mathbb{C}\subset\cdots \tag{1}$$

则由 $H_*(F^p\mathbb{C}/F^{p-1}\mathbb{C})$ 可给出 $H_*(\mathbb{C})$ 的一些信息.

对 R-模也有类似的情况.设 $M\in{}_R\mathfrak{M}$,若有 M 的子模升链

$$\cdots\subset F^{p-1}M\subset F^pM\subset F^{p+1}M\subset\cdots \tag{2}$$

我们可由此得一个分次模

$$G_RM=\{F^pM/F^{p-1}M\}$$

这个分次模在相当程度上也可给出 M 的一些信息.比如,可以证明如下结果:

设 $f:M\to M'$ 为 R-模同态,M,M' 各有子模升链(2)与

$$\cdots\subset\Phi^{p-1}M'\subset\Phi^pM'\subset\Phi^{p+1}M'\subset\cdots$$

且

$$f(F^pM)=f(M)\cap\Phi^pM'$$

则 f 诱导的分次模同态

$$\tilde{f}:G_RM\to G_RM'$$

为单(满)同态的充要条件是 f 为单(满)同态.

若 R 为整环(无零因子交换环),我们可定义 $M\in{}_R\mathfrak{M}$ 的秩为

$$\operatorname{rank}M=\dim_K M\underset{R}{\otimes}K$$

其中 $K=Q(R)$ 为 R 的全商环(分式域).可以证明,若(2)为由 0 开始到 M 结束的有限链时,

$$\operatorname{rank}M=\sum\operatorname{rank}(F^pM/F^{p-1}M)$$

由上已不难看出(2)能反映出 M 的不少信息,于是可引出如下的概念(可看成拓扑中过滤概念的移植).

定义 1　设 $M\in{}_R\mathfrak{M}$,称 M 的子模升链(2)为 M 的一个**过滤**(filtration).若(2)为由 0 开始到 M 结束的有限链

$$0=F^sM\subset\cdots\subset F^{p-1}M\subset F^pM\subset F^{p+1}M\subset\cdots\subset F^tM=M$$

则又称(2)为 M 的**有界过滤**(bounded filtration).

类似地可定义群、环及 R－模复形的过滤(甚至一般范畴中也可用子对象定义过滤).特别是当 I 为 R 的理想、$M\in{}_R\mathfrak{M}$ 时,可由$\{I^nM\}$给出 M 的一个过滤,从而给 M 一个 I－adic 拓扑.

现在设(1)为 R－模复形$\mathbb{C}$的一个过滤,我们来证明由此可确定一个正合三角形,即

命题 1 设(1)为 R－模复形$\mathbb{C}$的一个过滤,则有双分次 R－模的正合三角形

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\alpha(1,-1)} & D \\ & {\scriptstyle\gamma(-1,0)}\nwarrow \quad \swarrow{\scriptstyle\beta(0,0)} & \\ & E & \end{array} \tag{3}$$

其中 α、β、γ 分别为双次数是$(1,-1)$,$(0,0)$,$(-1,0)$的双分次模同态,即有下面的正合列

$$\cdots\longrightarrow D_{p-1,q+1}\xrightarrow{\alpha}D_{pq}\xrightarrow{\beta}E_{pq}\xrightarrow{\gamma}D_{p-1,q}\xrightarrow{\alpha}D_{p,q-1}\longrightarrow\cdots$$

证 为简化记号,我们记 $F^p\equiv F^p\mathbb{C}$,则有 R－模复形的短正合列

$$0\to F^{p-1}\to F^p\to F^p/F^{p-1}\to 0$$

由长正合列定理知有短正合列(各项分别记为 $D_{p-1,q+1}$,D_{pq},E_{pq}等)

$$\begin{array}{ccccc} \cdots\longrightarrow H_{p+q}(F^{p-1}) & \xrightarrow{\alpha} & H_{p+q}(F^p) & \xrightarrow{\beta} & H_{p+q}(F^p/F^{p-1}) \\ \parallel\!\mid & & \parallel\!\mid & & \parallel\!\mid \\ D_{p-1,q+1} & & D_{pq} & & E_{pq} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\gamma}H_{p+q-1}(F^{p-1})\longrightarrow\cdots \\ \parallel\!\mid \\ D_{p-1,q} \end{array}$$

于是命题即证出. □

这就引出一个新概念——正合偶.

定义 2 设 D,E 为双分次 R - 模且对有双次数的双分次 R - 模同态 α、β、γ 有正合三角形

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\alpha} & D \\ & {\scriptstyle\gamma}\nwarrow \quad \swarrow{\scriptstyle\beta} & \\ & E & \end{array} \tag{4}$$

则称(4)为一个**正合偶**(exact couple).

显然地,正合偶是一个双分次 R - 模的长正合列,正合偶的对偶图(箭头改号)仍为一个正合偶.上面的(3)是一种常见的正合偶.下面,我们用(3)引出谱序列的概念.为此,我们由(3)先构作新的正合偶.

第一步:跳过 α,记 $d^1=\beta\gamma$ 为由 γ 与 β 合成的双分次模同态.即

$$\begin{array}{ccc} E_{pq} & \xrightarrow{\gamma(-1,0)} & D_{p-1,q} \\ & {\scriptstyle d^1_{pq}}\nwarrow & \downarrow{\scriptstyle\beta(0,0)} \\ & & E_{p-1,q} \end{array}$$

容易验证 $\gamma\beta=0$,因此

$$d^1d^1=(\beta\gamma)(\beta\gamma)=\beta(\gamma\beta)\gamma=0$$

于是 E 有同调模

$$H(E,d^1)=\mathrm{Ker}d^1/\mathrm{Im}d^1$$

记

$$E^2\equiv H(E,d^1)$$

其中 E 右上肩的数字为肩码,这是一个双分次 R - 模,即

$$E^2_{pq} = \ker d^1_{pq} / \operatorname{Im} d^1_{p+1,q}$$

而且容易看出 d^1 的双次数为

$$\operatorname{bideg} d^1 = (-1, 0).$$

第二步:将双分次模 $\operatorname{Im}\alpha$ 记为 D^2,即

$$D^2 \equiv \operatorname{Im}\alpha$$

由

$$\operatorname{bideg}\alpha = (1, -1)$$

知,

$$D^2_{pq} = \alpha_{p-1,q+1}(D_{p-1,q+1}) = \operatorname{Im}\alpha_{p-1,q+1} \subset D_{pq}$$

第三步:定义 $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$(这里与下面其他文字的右上肩的数字都只作肩码理解,不表示"方指数")得图

$$\begin{array}{ccc} D^2 & \xrightarrow{\alpha^2} & D^2 \\ & {\scriptstyle\gamma^2}\nwarrow \quad \swarrow{\scriptstyle\beta^2} & \\ & E^2 & \end{array} \tag{5}$$

由 $D^2 = \operatorname{Im}\alpha \subset D$ 知,可定义

$$\alpha^2 = \alpha|_{D^2}$$

显然

$$\operatorname{bideg}\alpha^2 = \operatorname{bideg}\alpha = (1, -1)$$

对任意的 $y \in D^2 \equiv \operatorname{Im}\alpha$,定义

$$\beta^2(y) = [\beta\alpha^{-1}(y)]$$

其中 $\alpha^{-1}(y)$表 y 对 α 的原象,[ ]表同调类(记住 $E^2 \equiv H(E, d^1)$).详言之,即对任意的 $y \in D^2_{pq}$,由 $\operatorname{bideg}\alpha = (1, -1)$ 知,必有 $x_{p-1,q+1} \in D_{p-1,q+1}$ 使

$$y = \alpha_{p-1,q+1}(x_{p-1,q+1})$$

于是

$$\beta^2_{pq}=\beta_{p-1,q+1}\alpha^{-1}_{p-1,q+1}:y\longmapsto[\beta_{p-1,q+1}(x_{p-1,q+1})]\in E^2_{p-1,q+1}$$

这是一个完全确定的双分次 R－模同态. 事实上,若另取一个 $x'_{p-1,q+1}\in D_{p-1,q+1}$使

$$y=\alpha_{p-1,q+1}(x'_{p-1,q+1})$$

则

$$x_{p-1,q+1}-x'_{p-1,q+1}\in\ker\alpha_{p-1,q+1}=\mathrm{Im}\gamma$$

(此处及以后为化简记号以求醒目,常省写足码). 由此知必有 $\bar{y}\in E$ 使 $x-x'=\gamma(\bar{y})$. 用 β 作用后,有

$$\beta(x-x')=\beta\gamma(\bar{y})=d^1(\bar{y})\in\mathrm{Im}d^1$$

因此

$$[\beta(x)]=[\beta(x')]$$

容易看出

$$\mathrm{bideg}\beta^2=(-1,1)$$

再来定义 γ^2. 这只要对任意的 $z_{pq}\in E_{pq}$,由

$$\gamma^2_{pq}[z_{pq}]=\gamma_{pq}(z_{pq})\in D_{p-1,q}$$

来定义 $\gamma^2:E^2\to D^2$ 即可. 不难验证这也是完全确定的,因为若 $[z']=[z]$,则 $z'-z\in\mathrm{Im}d^1$,于是有 $z''\in E$ 使 $z'-z=d^1(z'')$. 由此知

$$\gamma^2[z'-z]=\gamma(z'-z)=\gamma d^1(z'')=\gamma\beta\gamma(z'')=(\gamma\beta)\gamma(z'')=0$$

即

$$\gamma^2[z']=\gamma^2[z]$$

不难看出

$$\mathrm{bideg}\gamma^2=(-1,0)$$

注 1 不难看出上述的构作过程对一般的正合偶(α,β,γ 的双次数可任意)也是适用的.

下面我们来证明这样构作出的三角图的确是一个正合偶. 即

命题 2 (5)为正合偶,称为正合偶(3)的**导出偶**(derived couple).

证 我们用图追踪的方法来证(5)为正合三角形即可.注意,由(3)的正合性与 $\alpha^2,\beta^2,\gamma^2$ 的定义已容易看出

$$\mathrm{Im}\gamma^2\subset\mathrm{Ker}\alpha^2$$

$$\mathrm{Im}\alpha^2\subset\mathrm{Ker}\beta^2$$

$$\mathrm{Im}\beta^2\subset\mathrm{Ker}\gamma^2$$

于是只需再证相应的三个反向包含关系.

(i) $\mathrm{Ker}\alpha^2\subset\mathrm{Im}\gamma^2$:任取 $x\in D^2\equiv\mathrm{Im}\alpha$ 使 $\alpha^2x=\alpha x=0$,则 $x\in\mathrm{Ker}\alpha=\mathrm{Im}\gamma$.于是必有 $y\in E$ 使 $x=\gamma(y)$.注意到 $x\in\mathrm{Im}\alpha=\mathrm{Ker}\beta$ 又知

$$0=\beta(x)=\beta\gamma(y)\equiv\alpha^1(y)$$

即 $y\in\mathrm{Ker}d^1$.于是由 γ^2 的定义知 $x=\gamma^2[y]$,即 $x\in\mathrm{Im}\gamma^2$,故 $\mathrm{Ker}\alpha^2\subset\mathrm{Im}\gamma^2$.

(ii) $\mathrm{Ker}\beta^2\subset\mathrm{Im}\alpha^2$:任取 $x\in D^2\equiv\mathrm{Im}\alpha$ 使 $\beta^2x=0$,此时必有 $y\in D$ 使 $x=\alpha(y)$.但由 $\beta^2x=[\beta\alpha^{-1}(x)]=[\beta(y)]=0$ 知 $\beta(y)\in\mathrm{Im}d^1$,于是有 $w\in E$ 使

$$\beta(y)=d^1(w)=\beta\gamma(w)$$

由此知

$$y-\gamma(w)\in\mathrm{Ker}\beta=\mathrm{Im}\alpha=D^2$$

$$\alpha^2(y-\gamma(w))=\alpha(y-\gamma(w))\xlongequal[\alpha\gamma=0]{}\alpha(y)=x$$

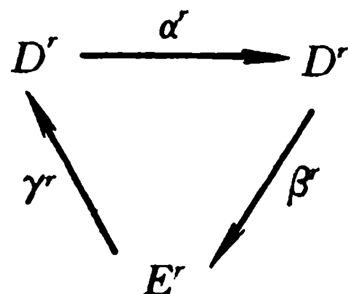
因此 $x\in\mathrm{Im}\alpha^2$.故 $\mathrm{Ker}\beta^2\subset\mathrm{Im}\alpha^2$.

(iii) $\mathrm{Ker}\gamma^2\subset\mathrm{Im}\beta^2$:任取 $x=[y]\in E^2=H(E)$使 $\gamma^2[y]=\gamma[y]=0$,即 $x=[y]\in\mathrm{Ker}\gamma^2$,则 $y\in\mathrm{Ker}\gamma=\mathrm{Im}\beta$.于是又必有 $w\in D$ 使 $y=\beta(w)$.但

$$\beta^2(\alpha(w))=[y]=x$$

即 $x\in\mathrm{Im}\beta^2$.故 $\mathrm{Ker}\gamma^2\subset\mathrm{Im}\beta^2$. □

由上述构作与结果,我们可递归地定义(3)的第 $r+1$ 个导出偶为它的第 r 个导出偶



的导出偶.用归纳法,不难证明下述结果.

定理 1 设$(D^r, E^r, \alpha^r, \beta^r, \gamma^r)$为双分次 R - 模正合偶(3)的第 r 个导出偶,则

(i) $\text{bideg}\,\alpha^r = (1, -1) = \text{bideg}\,\alpha$

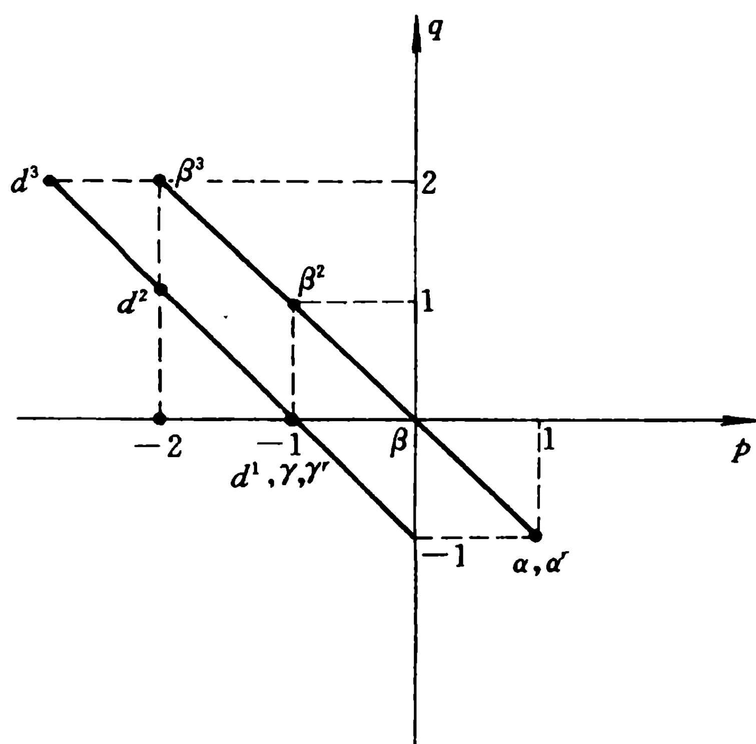
$\text{bideg}\,\beta^r = (1-r, r-1)$

$\text{bideg}\,\gamma^r = (-1, 0) = \text{bideg}\,\gamma$

(ii) 令 $d^r = \beta^r\gamma^r$ 则 $\text{bideg}\,d^r = (-r, r-1)$, $d^r d^r = 0$

(iii) $E^r_{pq} = \text{Ker}\,d^{r-1}_{pq} / \text{Im}\,d^{r-1}_{p+r-1, q-r+2}$, 因此 $E^r = H(E^{r-1}, d^{r-1})$

导出偶中 $\alpha^r, \beta^r, \gamma^r, d^r$ 的双次数可直观地图示如下(标 x 的点表 x 的双次数):



由此引出谱序列的定义：

定义 3 设$\{E^r, d^r, r\geqslant 1\}$为一列双分次 R－模，$d^r d^r=0$ 且

$$E^{r+1}\simeq H(E^r, d^r)=\mathrm{Ker}d^r/\mathrm{Im}d^r$$

则称$\{E^r, d^r, r\geqslant 1\}$为一个($R$－模)**谱序列**，也有时简记为$\{E^r, d^r\}$或$\{E^r\}$.

注 2 有的书刊上，在这种对应同调的谱序列中将 E^r 记为 E_r，E^r_{pq} 记为E_r^{pq}，而在对应上同调的谱序列中采用 E^r，E^r_{pq} 记号，显然这是无关紧要的.

注 3 更一般地，我们可对任意的 Abel 范畴 $\mathscr{A}$ 定义谱序列，现简述如下.

在 $\mathscr{A}$ 中称满足 $d^2=0$ 的态射 $d: A\rightarrow A$ 为 A 上的**微分**，称(A, d)为 $\mathscr{A}$ 中的**微分对象**，而称 $H(A, d)=\mathrm{Ker}d/\mathrm{Im}d$ 为(A, d)的**同调对象**.

若 $\mathscr{A}$ 中的微分对象列$\mathbb{E}=\{(E^n, d^n)\}$满足

$$H(E^n, d^n)\simeq E^{n+1}, \quad n=1,2,\cdots$$

则称$\mathbb{E}$为 $\mathscr{A}$ 中的一个**谱序列**.

从定理 1 与定义 3 立得(这里记 $E^1=E$)

推论 1 双分次 R－模的每一个正合偶都确定一个谱序列.因此，每一个 R－模复形的过滤都确定一个谱序列.

与分析学中讨论序列的极限类似，谱序列理论中也要定义谱序列的极限项.所不同的是谱序列的极限项是一定存在的，问题是如何确定它.为此，我们再介绍一个概念.

定义 4 设 M 为 R－模、分次 R－模或双分次 R－模.若 M'，M''都是M 的子模且$M''<M'$，则称 M'/M''为M 的一个**次商模**(subquotient module).

显然，次商模概念是商模的推广，次商模的意义还可从下例看出.

例 设

$$\mathbb{A}\equiv\cdots\rightarrow A_{n+1}\xrightarrow{d_{n+1}}A_n\xrightarrow{d_n}A_{n-1}\rightarrow\cdots$$

为 R - 模复形,则$\mathbb{A}$ 的第 n 个同调模

$$H_n(\mathbb{A})=\mathrm{Ker}d_n/\mathrm{Im}d_{n+1}$$

是 A_n 的一个次商模,在 $R=\mathbb{Z}$ 时也称它们为次商.

不难看出,次商模有如下的一些性质.

推论 2 (次商模的可传性) 设 B 为 A 的次商模,C 为 B 的次商模,则 C 也为 A 的次商模.

推论 3 设 B 为 A 的次商模,则

(i) 若 $A=0$,则 $B=0$;

(ii) 若 $|A|<\infty$,则 $|B|<\infty$;

(iii) 若 R 为 Noether 环且 A 为有限生成的,则 B 也是有限生成的;

(iv) 若 $R=\mathbb{Z}$ (即 A 为 Abel 群),则 A 为挠群时,B 为挠群;A 为循环群时,B 为循环群.

由此推论已可看出,次商模具有原模的不少性质,用之于谱序列,我们有如下命题.

命题 3 设 $\{E^r,d^r,r\geqslant 1\}$ 为一个 R - 模谱序列,则一切 E^r 都是 E^1 的次商模;在 $r\geqslant 2$ 时,E^r 也都是 E^2 的次商模.

证 由

$$E^2=H(E^1,d^1)=\mathrm{Ker}d^1/\mathrm{Im}d^1$$

知 E^2 为 E^1 的次商模.同理,由 $E^r=H(E^{r-1},d^{r-1})$知,E^r 为E^{r-1} 的次商模,再由次商模的可传性(推论 2),即得欲证. □

现在,我们来分析一下谱序列 $\{E^r,d^r,r\geqslant 1\}$ 中的这些次商模.

注意,E^2 可写成

$$E^2=Z^2/B^2$$

其中 $Z^2=\mathrm{Ker}d^1,B^2=\mathrm{Im}d^1$. 一般地,$E^r$ 可写成

$$E^r=Z^r/B^r$$

其中 $Z^r=\mathrm{Ker}d^{r-1},B^r=\mathrm{Im}d^{r-1}$. 由于

$$E^3=Z^3/B^3$$

为 E^2 的次商模,我们可设

$$Z^3 = X/B^2, \quad B^3 = Y/B^2$$

于是由模同态的双商定理知

$$E^3 = Z^3/B^3 \simeq X/Y$$

且

$$B^2 \subset Y \subset X \subset Z^2$$

不妨设 $Z^3 = X, B^3 = Y$,于是有

$$0 \subset B^2 \subset B^3 \subset Z^3 \subset Z^2 \subset E^2$$

依此类推之,有

$$0 \subset B^2 \subset \cdots \subset B^r \subset B^{r+1} \subset \cdots \subset Z^{r+1} \subset Z^r \subset \cdots \subset Z^2 \subset E^2$$

容易看出,对于包含关系,$\{B^r\}$是递增的,$\{Z^r\}$是递降的,且任一个 B^r 都在任一个 Z^j 之中.为方便起见,依照数列极限的办法给出如下定义.

定义 5 记

$$Z_{pq}^{\infty} = \bigcap_{r=2}^{\infty} Z_{pq}^{r}$$

$$B_{pq}^{\infty} = \bigcup_{r=2}^{\infty} B_{pq}^{r}$$

$$E_{pq}^{\infty} = Z_{pq}^{\infty} / B_{pq}^{\infty}$$

且将双分次 R-模

$$E^{\infty} = \{E_{pq}^{\infty}\}$$

称为谱序列$\{E^r\}$的**极限项**(limit term).

在谱序列的应用中,对一些常见情况可有限步地算出谱序列的极限项,从而得到有关的同调性质或有关复形的同调模.容易看出,当 r 相当大时,E^r“逼近”E^{∞},且 E^1, B^1, Z^1,甚至前面有限多个 E^r, B^r, Z^r 当知道 $E^{r+1}, B^{r+1}, Z^{r+1}$ 时都可略而不计.也就是说,在 E^r, B^r, Z^r 已确定出 $E^{r+1}, B^{r+1}, Z^{r+1}$ 后,它们的任务也就完成了.在确定该谱序列的极限项时可略而不计.

下面的两条推论在谱序列的应用中是有意义的,它们的证明都是显然的.

推论 4 在谱序列$\{E^r, d^r\}$中,

(i) 若对一切 $p, g, d^r_{pq}=0$,则 $E^{r+1}=E^r$;

(ii) 若对一切 p, q,及 $r \geqslant s$(其中 s 为一个固定的正整数), $d^r_{pq}=0$,则

$$E^{\infty}_{pq}=E^s_{pq}$$

推论 5 任何 R - 模复形的过滤都给出一个正合偶,因此可用本节的方法给出一个谱序列以及这个谱序列的极限项,分别称为由此过滤确定的谱序列与极限项.

于是,我们完成了如下的程序:

复形的过滤⇒正合偶⇒导出偶⇒谱序列⇒极限项.

对上复形的过滤这一程序是类似的,这里不再细述.

现在自然要问:若对复形$\mathbb{A}$完成了上述程序,即求出了$\mathbb{A}$的一个过滤确定的谱序列及其极限项 $E^{\infty}=\{E^{\infty}_{pq}\}$,复形$\mathbb{A}$的同调 $H(\mathbb{A})$与 E^{∞}有何关系?

我们将这个关键性的问题放在下节中来讨论.

习 题 4.1

1. 设有 R - 模复形正合列

$$0 \to \mathbb{A} \to \mathbb{B} \to \mathbb{C} \to 0.$$

取$\mathbb{B}$的一个过滤$\{F^p\mathbb{B}\}$为 $F^0\mathbb{B}=0, F^1\mathbb{B}=\mathbb{A}$($\mathbb{A}$视为$\mathbb{B}$的子复形),$F^2\mathbb{B}=\mathbb{B}$.求出 E^1_{pq} 并描述谱序列与长正合列的关系.

§2 谱序列的收敛及对双复形的应用

为了研究上节遗留下来的问题,即,由复形$\mathbb{A}$的过滤确定的谱序列$\{E^r, d^r\}$与复形的同调模 $H(\mathbb{A})$有何关系? 我们需要如下的一些概念以方便下文的讨论.

定义 1 设 M 为分次R - 模,$\{E^r\}$为一个谱序列,若有 M 的一个过滤$\{\Phi^p M\}$使有 R - 模同构

$$E^{\infty}_{pq} \simeq \Phi^p M_{p+q} / \Phi^{p-1} M_{p+q} \equiv \Phi^p M_n / \Phi^{p-1} M_n,$$
$$\forall p, g, n = p + q$$

则称谱序列$\{E^r\}$**粗收敛**(roughly converges)于 M,记为

$$E^2_{pq} \xrightarrow[p]{} M$$

这里的 p 称为M 的**过滤次数**(filtration degree).

注 1 由于,一般地说,

$$E^{\infty}_{pq} \not\simeq E^{\infty}_{qp}$$

因此,$E^2_{pq} \xrightarrow[p]{} M$ 与 $E^2_{pq} \xrightarrow[q]{} M$ 的含意是不同的.

定义 2 设$\{\Phi^p M\}$为分次 R - 模 M 的过滤,若对任意的 n,都有 $s = s(n)$与 $t = t(n)$使

$$\Phi^s M_n = 0 \text{ 且 } \Phi^t M_n = M_n$$

即,M 的过滤$\{\Phi^p M\}$为下形:

$$0 = \Phi^s M_n \subset \Phi^{s+1} M_n \subset \cdots \subset \Phi^t M_n = M_n, \forall n$$

此时称$\{\Phi^p M\}$为 M 的**有界过滤**(bounded filtration)或**有限过滤**.当上述的 s, t 与 n 无关时又称**一致有界过滤**.

对复形$\mathbb{C}$,可类似地定义它的有界过滤.

定义 3 设分次 R - 模 M 有有界过滤$\{\Phi^p M\}$使谱序列$\{E^r\}$满足

$$E^{\infty}_{pq} \simeq \Phi^p M_n / \Phi^{p-1} M_n, \forall p, q, n = p + q.$$

则称谱序列$\{E^r\}$**收敛**于 M,记为

$$E^2_{pq} \underset{p}{\Rightarrow} M_n$$

也称$\{E^r\}$为由 M 确定的谱序列.

由此定义知:收敛即关于有界过滤的粗收敛.

下面的定理给出了复形同调的一个有效的计算法.

定理 1 设$\{F^p \mathbb{C}\}$为 R - 模复形$\mathbb{C}$的有界过滤,$\{E^r, d^r\}$为由它确定的谱序列(即用此过滤按上节的方法给出的谱序列),则

(i) 对一切 p、q 都有由它们确定的充分大的 r 使

$$E_{pq}^{\infty}=E_{pq}^{r}$$

(ii) $E_{pq}^{2}\underset{p}{\Rightarrow}H_{n}(\mathbb{C})$.

注意,此定理的结论(i)指出了:有界过滤确定的谱序列的过程只需"有限步"的计算.此定理的结论(ii)又指出:此谱序列的极限项事实上即复形同调模的一个过滤给出的商模.至于这个复形同调模的过滤如何给出,我们将在下面的证明中说明.

证 (i) 由$\{F^{p}\mathbb{C}\}$为有界过滤知,必有 $t=t(n)$使对任意的 $p>t$, $F^{p-1}=F^{p}$. 于是

$$F^{p}/F^{p-1}=0$$

因此

$$E_{pq}=H_{p+q}(F^{p}/F^{p-1})=0 \quad \forall p>t$$

由于 E_{pq}^{r}均为E_{pq}的次商模,由此又知对任意的 r 与 q,

$$E_{pq}^{r}=0, \quad \forall p>t$$

同理,由$\{F^{p}\mathbb{C}\}$的有界性知有 $s=s(n)$使对任意的 $p<s$ 与 r,q 都有

$$E_{pq}^{r}=0$$

从上节定理 1 知

$$\text{bideg}d^{r}=(-r,r-1)$$

因此,对任意的 p,q,r,

$$d^{r}(E_{pq}^{r})\subset E_{p-r,q+r-1}^{r}$$

当 r 充分大时,总可使 $p-r<s$. 此时

$$E_{p-r,q+r-1}^{r}=0$$

因此

$$E_{pq}^{r}\doteq\text{Ker}d_{pq}^{r}$$

考察

$$E_{pq}^{r+1}\equiv\text{Ker}d_{pq}^{r}/\text{Im}d_{p+r,q-r+1}^{r}$$

当 r 充分大时,又可使 $p+r>t$,于是由上知

$$\text{Im}d_{p+r,q-r+1}^{r}=d_{p+r,q-r+1}^{r}(E_{p+r,q-r+1}^{r})=0$$

由此知,对充分大的 r,有

$$E_{pq}^{r+1}=\mathrm{Ker}d_{pq}^{r}=E_{pq}^{r}$$

这就证出了(i).

(ii) 我们取

$$\Phi^{p}H_{n}(\mathbb{C})=\mathrm{Im}(H_{n}(F^{p}\mathbb{C})\to H_{n}(\mathbb{C}))$$

则得 $H_n(\mathbb{C})$的一个过滤$\{\Phi^p H_n(\mathbb{C})\}$. 由$\{F^p\mathbb{C}\}$的有界性知,必有 $s=s(n)$与 $t=t(n)$使

$$0=\Phi^{s}H_{n}(\mathbb{C})\subset\Phi^{s+1}H_{n}(\mathbb{C})\subset\cdots\subset\Phi^{t}H_{n}(\mathbb{C})=H_{n}(\mathbb{C})$$

即,$\{\Phi^p H_n(\mathbb{C})\}$为 $H_n(\mathbb{C})$的有界过滤. 对这个过滤用上节的方法得到正合偶与第 r 个导出偶,于是有长正合列

$$\cdots\to E_{p+r-1,q-r+2}^{r}\xrightarrow{\gamma^{r}}D_{p+r-2,q-r+2}^{r}\xrightarrow{\alpha^{r}}D_{p+r-1,q-r+1}^{r}\xrightarrow{\beta^{r}}E_{pq}^{r}$$
$$\xrightarrow{\gamma^{r}}D_{p-1,q}^{r}\to\cdots\tag{1}$$

由 D^r 的定义

$$D^{r}=\underbrace{\alpha\cdots\alpha}_{r-1}D$$

注意到

$$\mathrm{bideg}\alpha=(1,-1)$$

即知

$$D_{p+r-1,q-r+1}^{r}=\underbrace{\alpha\cdots\alpha}_{r-1}D_{pq}=\mathrm{Im}(H_{p+q}(F^{p}\mathbb{C})\to H_{p+q}(F^{p+r-1}\mathbb{C})).$$

固定 p,q,由$\{F^p\mathbb{C}\}$的有界性知,必有充分大的 r 使

$$F^{p+r-1}\mathbb{C}=\mathbb{C}$$

于是由 Φ^p 的定义知,此时

$$D_{p+r-1,q-r+1}^{r}=\Phi^{p}H_{p+q}(\mathbb{C})$$

仿此知,有充分大的 r 使

$$D_{p+r-2,q-r+2}^{r}=\Phi^{p-1}H_{p+q}(\mathbb{C})$$

但 $E_{p+r-1,q-r+2}^{r}$为

$$E_{p+r-1,q-r+2}=H_{n+1}(F^{p+r-1}\mathbb{C}/F^{p+r-2}\mathbb{C})$$

的次商模,而对充分大的 r, $F^{p+r-1}\mathbb{C} = F^{p+r-2}\mathbb{C}$ (由 $\{F^p\mathbb{C}\}$ 的有界性). 因此

$$E^r_{p+r-1,q-r+2} = 0$$

于是对充分大的 r, (1)成为

$$0 \to \Phi^{p-1}H_{p+q}(\mathbb{C}) \to \Phi^p H_{p+q}(\mathbb{C}) \to E^r_{pq} \to D^r_{p-1,q} \to \cdots$$

由此可见,若能证出

$$D^r_{p-1,q} = 0$$

对充分大的 r 成立,即知

$$\Phi^p H_{p+q}(\mathbb{C}) / \Phi^{p-1} H_{p+q}(\mathbb{C}) \simeq E^r_{pq} = E^\infty_{pq}$$

对充分大的 r 成立,这样就证出了(ii).

事实上,注意 bideg$\alpha = (1, -1)$,并用上节命题 1 证明中的记号,有

$$D^r_{p-1,q} = \underbrace{\alpha \cdots \alpha}_{r-1} D_{p-r,q+r-1} = \underbrace{\alpha \cdots \alpha}_{r-1} H_{p+q-1}(F^{p-r}\mathbb{C})$$

取充分大的 r 可使 $p - r < s$. 此时即有

$$D^r_{p-1,q} = 0$$

□

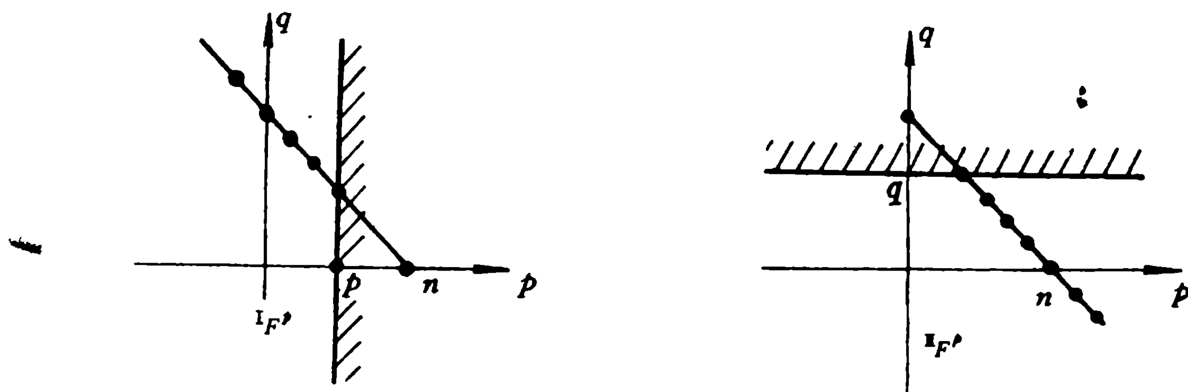
下面我们来介绍谱序列的收敛对双复形的一些具体应用,先构作双复形之全复形的两种过滤.

设双复形(M, d', d'')的全复形为 Tot(M),其中 $M = \{M_{pq}\}$,记

$$({}^{\mathrm{I}}F^p \mathrm{Tot}(M))_n = \coprod_{i \leqslant p} M_{i,n-i}$$

$$({}^{\mathrm{II}}F^p \mathrm{Tot}(M))_n = \coprod_{j \leqslant p} M_{n-j,j}$$

它们的直和项取法可分别图示如下:



容易验证,对 $d=\sum(d'+d'')$ 有

$$\begin{aligned} d(M_{i,n-i}) &= (d'+d'')M_{i,n-i} \\ &= d'M_{i,n-i}\oplus d''M_{i,n-i} \\ &\subset M_{i-1,n-i}\oplus M_{i,n-i-1} \\ &\subset ({}^{\mathrm{I}}F^p\mathrm{Tot}(M))_{n-1}, \quad \forall i\leqslant p \end{aligned}$$

由此知 ${}^{\mathrm{I}}F^p\mathrm{Tot}(M)$ 为 $\mathrm{Tot}(M)$ 的子复形,即

$$ {}^{\mathrm{I}}F^p\mathrm{Tot}(M) < \mathrm{Tot}(M) $$

且

$$\cdots {}^{\mathrm{I}}F^{p-1}\mathrm{Tot}(M) < {}^{\mathrm{I}}F^p\mathrm{Tot}(M) < {}^{\mathrm{I}}F^{p+1}\mathrm{Tot}(M) < \cdots$$

因此 $\{{}^{\mathrm{I}}F^p\mathrm{Tot}(M)\}$ 为 $\mathrm{Tot}(M)$ 的过滤.

同理知 $\{{}^{\mathrm{II}}F^p\mathrm{Tot}(M)\}$ 也为 $\mathrm{Tot}(M)$ 的过滤.

定义 4 设 $\mathrm{Tot}(M)$ 为双复形 (M,d',d'') 的全复形,则称

$\{{}^{\mathrm{I}}F^p\mathrm{Tot}(M)\}$ 为 $\mathrm{Tot}(M)$ 的**第一种过滤**.而称

$\{{}^{\mathrm{II}}F^p\mathrm{Tot}(M)\}$ 为 $\mathrm{Tot}(M)$ 的**第二种过滤**.这两种过滤所确定的谱序列分别记为 $\{{}^{\mathrm{I}}E^r\}$、$\{{}^{\mathrm{II}}E^r\}$.

为了方便起见,当双复形中的 $M=\{M_{pq}\}$ 满足:对任意的 $p>0$,$M_{pq}=0$,对任意的 $q>0$ 也有 $M_{pq}=0$,则称 (M,d',d'') 为**第三象限双复形**(third quadrant bicomplex).类似地,若 $p<0$ 或 $q<0$ 时必有 $M_{pq}=0$,则称 (M,d',d'') 为**第一象限双复形**(first quadrant bicomplex)

例如,上章末节中,对右 R-模 A,左 R-模 B 的删项投射分

解$\mathbb{P}_{\hat{A}}$与$\mathbb{P}_{\hat{B}}$给出的双复形(以$\mathbb{P}_{\hat{A}}\otimes\mathbb{P}_{\hat{B}}$为全复形)即为第一象限双复形,而第三象限双复形的重要例子可由两个左 R - 模的删项投射分解与删项内射分解照上章末节的办法给出.

设 $A,B\in {}_R\mathfrak{M}$,它们的删项投射分解与删项内射分解各为

$$\mathbb{P}_{\hat{A}}=\cdots\to p_n\xrightarrow{\Delta'_n}p_{n-1}\to\cdots\to p_0\to 0$$

$$\mathbb{E}_{\hat{B}}=0\to E^0\to\cdots\to E^q\xrightarrow{\Delta''_q}E^{q+1}\to\cdots$$

将上复形$\mathbb{E}_{\hat{B}}$改写为复形的形式:

$$\mathbb{E}_{\hat{B}}=0\to E_0\to E_{-1}\to\cdots\to E_{-q}\xrightarrow{\Delta''_q}E_{-(q+1)}\to\cdots$$

令

$$M_{-p,q}=\mathrm{Hom}(P_p,E_{-q})$$

$$d'_{-p,q}=(\Delta'_{p+1})^*:\mathrm{Hom}(P_p,E_{-q})\to\mathrm{Hom}(P_{p+1},E_{-q})$$

$$f\longmapsto f\Delta'_{p+1}$$

$$d''_{-p,q}=(-1)^{p+q+1}(\Delta''_q)_*:\mathrm{Hom}(P_p,E_{-q})\to\mathrm{Hom}(P_p,E_{-(q+1)})$$

$$f\longmapsto(-1)^{p+q+1}\Delta''_q f$$

这样就得到一个第三象限的双复形(M_{pq},d',d''),其全复形为$\mathrm{Hom}(\mathbb{P}_{\hat{A}},\mathbb{E}_{\hat{B}})$.

不难得出如下结果.

定理 2 设(M,d',d'')为左 R - 模双复形,$\mathrm{Tot}(M)$为它的全复形.

(i) $\mathrm{Tot}(M)$的第一(二)种过滤为有界过滤的充要条件是

$$|\{M_{pq}\mid p+q=n,\ M_{pq}\neq 0\}|<\infty,\quad \forall n$$

即在 p,q 坐标系中每一条 45°线 $p+q=n$ 上都只有有限个$M_{pq}\neq 0$;

(ii) 若(M,d',d'')为第一或第三象限双复形.则 $\mathrm{Tot}(M)$的第一种、第二种过滤都是有界的;

(iii) 若(M,d',d'')为第一或第三象限双复形,则对任意的

p,q,必有充分大的 r' 与 r'' 使

$$^{\mathrm{I}}E_{pq}^{\infty}={}^{\mathrm{I}}E_{pq}^{r'}$$

$$^{\mathrm{II}}E_{pq}^{\infty}={}^{\mathrm{II}}E_{pq}^{r''}$$

且

$$^{\mathrm{I}}E_{pq}^{2}\underset{p}{\Rightarrow}H_n(\mathrm{Tot}(M))$$

$$^{\mathrm{II}}E_{pq}^{2}\underset{p}{\Rightarrow}H_n(\mathrm{Tot}(M))$$

证 (i) 注意

$$|\{M_{pq}\mid p+q=n,\ M_{pq}\neq 0\}|<\infty,\quad \forall n$$

等价于对任意的 n,都有有限数 $s=s(n),t=t(n)$,由有界过滤的定义即得证.

(ii) 注意对第一象限双复形 取 $s(n)=-1,t(n)=n$,对第二象限双复形,取 $s(n)=-n-1,t(n)=0$ 即得证.

(iii) 由(ii)与定理 1 即得.

□

定理 2 中的(iii)是一个很好的结果,但它牵扯到一些具体计算.下面我们以第一种过滤为例说明一下这个计算过程(对第二种过滤是类似的).为方便起见,将第一种过滤的记号中 $^{\mathrm{I}}F$ 简记为 F.

先固定 n,由定义,记

$$F^p\equiv(F^p\mathrm{Tot}(M))_n=\coprod_{i\leqslant p}M_{i,n-i}$$

容易看出

$$F^p=M_{pq}\oplus F^{p-1},\quad \forall p+q=n$$

于是

$$(F^p/F^{p-1})_n=M_{pq} \tag{2}$$

将 $d=\sum(d'+d'')$ 作用于 M_{pq} 得

$$d_{pq}(M_{pq})=(d'_{pq}+d''_{pq})M_{pq}\subset M_{p-1,q}\oplus M_{p,q-1}$$

由 $M_{p-1,q}\subset F^{p-1}$ 知,只有 d'' 对 F^p/F^{p-1} 起着实质上的作用.因此,

F^p/F^{p-1}是带微分 d''的第 p 个列.故由上节命题 1 证明中的记号知

$$
\begin{aligned}
E_{pq} &= H_n(F^p/F^{p-1}, d) \\
&= \operatorname{Ker}(d''_{pq}: M_{pq} \to M_{p,q-1}) / \operatorname{Im}(d''_{p,q+1}: M_{p,q+1} \to M_{pq}) \\
&= H_q(M_{p,*}, d'')
\end{aligned} \tag{3}
$$

于是可引进记号(取第 p 列的同调)

$$H''_{pq}(M) = E_{pq}$$

容易看出,将 q 固定后,$\{H''_{pq}(M)\}$为复形、微分为 d'诱导的同态(容易验证它的完全确定性)

$$\bar{d}': H''_{pq}(M) \to H''_{p-1,q}(M)$$

$$\bar{d}'_{pq}([z_{pq}]) = [d'_{pq} z_{pq}]$$

其中[ ]表相应的同调类(同调模的元素).

将复形$\{H''_{pq}(M), \bar{d}'\}$的同调记为 $H' = \{H'_p\}$,则得双分次模

$$\{H'_p H''_{pq}(M)\}$$

称为双复形 M 关于第一种过滤的**第一种迭代同调**(先取 M 的第 p 列之同调,再取它们所成行的同调).现在我们来证明定理 2 中(iii)的具体化,即

定理 3 设 M 为第一(第三)象限 R – 模双复形,则

$$ {}^{\mathrm{I}}E^2_{pq} = H'_p H''_{pq}(M) \underset{p}{\Rightarrow} H_n(\operatorname{Tot}(M)).$$

证 由定理 2(iii)知,只需再证

$$ {}^{\mathrm{I}}E^2_{pq} = H'_p H''_{pq}(M) \quad (\text{简记为 } E^2 = H'H'')$$

仍记 $F = {}^{\mathrm{I}}F$,先设 M 为第一象限双复形.由模同态的双商定理得复形短正合列与下图

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & F^{p-1}/F^{p-2} & \xrightarrow{i} & F^p/F^{p-2} & \xrightarrow{\pi} & F^p/F^{p-1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \Big\| \text{对 } n-1 \text{ 仿(2)} & & \Big\| \text{仿(2)} & & \Big\| (2) & & \\
 & & & & M_{pq} \oplus M_{p-1,q+1} & \xrightarrow{\pi} & M_{pq} & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \Big\downarrow d'+d'' & & & & \\
0 & \longrightarrow & M_{p-1,q} & \xrightarrow[i]{} & M_{p-1,q} \oplus M_{p,q-1} & & & &
\end{array} \tag{4}
$$

由(3)式知，若 $z\in M_{pq}$ 使 $x=[z]\in E_{pq}$，则必有 $d''z=0$. 从第三章§1定理2知，由图(4)给出的连结同态为

$$\partial=i^{-1}(d'+d'')\pi^{-1}$$

取 $d^1=\partial$，则 $d^1x=[d'z]$，即 d^1 是由 d' 诱导出来的. 由之知

$$E^2=H(E,d^1)=H'H''$$

对第三象限双复形令 $M^{pq}=M_{-p,-q}$，$E_r^{pq}=E^r_{-p,-q}$ 由上即得证. □

为了研究 ${}^{\mathrm{II}}E^2_{pq}$，只需将 p,q 互换(转置)即化为 ${}^{\mathrm{I}}E^2_{pq}$ 的情况，我们为此引进如下概念.

定义 5 设 $M=\{M_{pq},d'_{pq},d''_{pq}\}$ 为 R－模双复形，则称

$$^tM=\{{}^tM_{pq},\Delta'_{pq},\Delta''_{pq}\}$$

为 M 的**转置双复形**(transposed bicomplex)，其中 ${}^tM_{pq}=M_{p,q}$，$\Delta'_{pq}=d''_{qp}$，$\Delta''_{pq}=d'_{qp}$.

由定义5容易得到

引理 1 在上述记号下，

$$^{\mathrm{I}}F(\mathrm{Tot}(M))={}^{\mathrm{II}}F(\mathrm{Tot}({}^tM))$$

$$^{\mathrm{II}}F(\mathrm{Tot}(M))={}^{\mathrm{I}}F(\mathrm{Tot}({}^tM))$$

现在我们不难证明如下结果，它是关于第二种迭代同调的.

定理 4 设 M 为第一(第三)象限 R－模双复形，则

$$^{\mathrm{II}}E^2_{pq}=H''_pH'_{qp}(M)\underset{p}{\Rightarrow}H_n(\mathrm{Tot}(M))$$

证 由定义5知

$$H_n(\mathrm{Tot}({}^tM))=H_n(\mathrm{Tot}(M))$$

又由

$$H''_{pq}({}^tM)=\mathrm{Ker}\Delta''_{pq}/\mathrm{Im}\Delta''_{p,q+1}=H'_{qp}(M)$$

及 $\Delta'=d''$ 知

$$H'_pH''_{pq}({}^tM)=H''_pH'_{qp}(M)$$

于是由定理3与引理1即得

$$^{\mathrm{II}}E^2_{pq}=H''_pH'_{qp}(M)=H'_pH''_{pq}({}^tM)\underset{p}{\Rightarrow}H_n(\mathrm{Tot}({}^tM))$$

$$= H_n(\mathrm{Tot}(M)) \qquad \square$$

对下面定义的通常谱序列，有关的同调性质特别简单.

定义 6　设 M 为双复形，则称 $\mathrm{Tot}(M)$ 的第一种或第二种过滤给出的谱序列为**通常谱序列**(usual spectral sequence).

若第一或第三象限双复形的通常谱序列 $\{E^r\}$ 满足

$$E^2_{pq} = 0, \quad \forall q \neq 0$$

即双分次模 E^2 的非零项只在 p - 轴上出现，则称 $\{E^r\}$ 为**衰退的**(**崩溃的**)(collapse)，或说它**对** q **衰退**.

对这种特殊的通常谱序列，有如下的有用结果.

定理 5　设 $\{E^r, d^r\}$ 为 R - 模双复形 M 的衰退谱序列，则

(i)　$E^\infty_{pq} = E^2_{pq}$，$\forall p, q$

因此，$E^\infty_{pq} = 0$，$\forall q \neq 0$；

(ii)　$H_n(\mathrm{Tot}(M)) \simeq E^2_{n,0}$

(M 为第一象限双复形时)；

$H_n(\mathrm{Tot}(M)) \simeq E_2^{n,0}$

(M 为第三象限双复形时，其中 $M^{pq} = M_{-p,-q}$，$E_r^{pq} = E^r_{-p,-q}$).

证　由本章 §1 定理 1 知

$$\mathrm{bideg}\, d^r = (-r, r-1)$$

因此

$$d^r_{pq} : E^r_{pq} \to E^r_{p-r, q+r-1}$$

由于 $\{E^r, d^r\}$ 是衰退的，即 $\forall q \neq 0$，$E^2_{pq} = 0$，于是当 $r \geqslant 2$ 时 $E^r_{pq} = 0$ 或 $E^r_{p-r,q+r-1} = 0$，故

$$d^r_{pq} = 0, \quad \forall r \geqslant 2, \ \forall p, q$$

由此知

$$E^r = \mathrm{Ker}\, d^r = \mathrm{Ker}\, d^r / \mathrm{Im}\, d^r = H(E^r) = E^{r+1}, \quad \forall r \geqslant 2$$

所以，$E^2 = E^\infty$. 这就证出了(i).

(ii)　只需考察 M 为第一象限双复形的情况，此时由定理 2 知，必有 $H_n(\mathrm{Tot}(M))$ 的有界过滤

$$0=\Phi^{-1}H_n\subset\cdots\subset\Phi^nH_n=H_n\equiv H_n(\mathrm{Tot}(M))$$

使

$$\Phi^pH_n/\Phi^{p-1}H_n\underset{n=p+q}{\simeq}E_{pq}^{\infty}\underset{(\mathrm{i})}{=}E_{pq}^2$$

由$\{E^r,d^r\}$衰退知,$E^2=\{E_{pq}^2\}$只可能有非零项$E_{n,0}^2$.于是

$$H_n\equiv H_n(\mathrm{Tot}(M))\simeq E_{n,0}^2$$

□

注 2 若$\{E^r,d^r\}$对 p 衰退(即$\forall\, p\neq 0, E_{pq}^2=0$).可得与定理 5 实质上相同的结果.

下面用谱序列重证 Tor_n 函子关于两个变元使用投射(或平坦)分解的一致性(参看第三章§3 定理 2),以说明上述结果的应用.

命题 1 设$A\in\mathfrak{M}_R, B\in{}_R\mathfrak{M}$,则

$$H_n(\mathbb{P}_{\hat{A}}\underset{R}{\otimes}B)\simeq H_n(\mathbb{P}_{\hat{A}}\underset{R}{\otimes}\mathbb{P}_{\hat{B}})\simeq H_n(A\underset{R}{\otimes}\mathbb{P}_{\hat{B}}),$$

其中$\mathbb{P}_{\hat{A}}$表示 X 的删项投射分解(所成的复形).因此

$$\mathrm{Tor}_n^R(-,B)\simeq\mathrm{Tor}_n^R(A,-)$$

证 设

$$\mathbb{P}_{\hat{A}}=\cdots\to P_n\to P_{n-1}\to\cdots\to P_0\to 0$$

$$\mathbb{P}_{\hat{B}}=\cdots\to Q_n\to Q_{n-1}\to\cdots\to Q_0\to 0$$

则有第一象限双复形

$$M=\{M_{pq}=P_p\otimes Q_q\}$$

其全复形为

$$\mathrm{Tot}(M)=\mathbb{P}_{\hat{A}}\otimes\mathbb{P}_{\hat{B}}$$

用第一种过滤,由定理 3 知

$$E_{pq}^2\equiv{}^{\mathrm{I}}E_{pq}^2=H_p'H''_{pq}(M)$$

其中

$$H''_{pq}(M)=\mathrm{Ker}d''_{pq}/\mathrm{Im}d''_{p,q+1}=H_q(P_p\otimes\mathbb{P}_{\hat{B}})$$

$$=\begin{cases}0, & q>0\\ P_p\otimes B, & q=0\end{cases}$$

(注意 P_p 是投射的,因而是平坦的,又

$$H''_{p,0} = \mathrm{CoKer}(P_p\otimes Q_1 \to P_p\otimes Q_0) = P_p\otimes B)$$

于是

$$H'_p H''_{pq}(M) = H_p(\mathbb{P}_{\hat{A}}\otimes B)$$

$$^{\mathrm{I}}E^2_{pq} = \begin{cases} 0, & q>0 \quad (\text{即 } q\neq 0) \\ H_p(\mathbb{P}_{\hat{A}}\otimes B), & q=0 \end{cases}$$

由此知 $\{E^r\}$ 是衰退的.因此用定理 5 即得

$$H_n(\mathbb{P}_{\hat{A}}\otimes\mathbb{P}_{\hat{B}}) \equiv H_n(\mathrm{Tot}(M)) \simeq {}^{\mathrm{I}}E^2_{n,0} = H_n(\mathbb{P}_{\hat{A}}\otimes B)$$

用第二种过滤类似地可得

$$^{\mathrm{II}}E^2_{pq} = \begin{cases} 0, & q>0 \quad (\text{即 } q\neq 0) \\ H_p(A\otimes\mathbb{P}_{\hat{B}}), & q=0 \end{cases}$$

于是

$$H_n(\mathbb{P}_{\hat{A}}\otimes\mathbb{P}_{\hat{B}}) \simeq H_n(A\otimes\mathbb{P}_{\hat{B}})$$

这就证出了命题.

□

注 3 显然地,命题 1 中 $\mathbb{P}_{\hat{A}}$,$\mathbb{P}_{\hat{B}}$ 分别表示 A,B 的删项平坦分解时,命题仍成立.

注 4 仿命题 1 之证法也可证明:对 $A, B\in {}_R\mathfrak{M}$ 有

$$H^n(\mathrm{Hom}(\mathbb{P}_{\hat{A}}, B)) \simeq H^n(\mathrm{Hom}(\mathbb{P}_{\hat{A}}, \mathbb{E}_{\hat{B}})) \simeq H^n(\mathrm{Hom}(A, \mathbb{E}_{\hat{B}}))$$

因此 Ext^n_R 的两种定义是等价的(见第三章 §3,定理 1),其中 $\mathbb{E}_{\hat{B}}$ 表示 B 的删项内射分解.将命题 1 之证与第三章 §3 定理 1 与定理 2 之证(那里省去了详细证明,只提出论证方法)相比较,不难看出,谱序列的证法要简单得多,且机械得多,因而容易掌握!

习 题 4.2

1. 设 M 为第一象限或第三象限 R - 模双复形,且行、列均正合,证明:$\mathrm{Tot}(M)$ 为零调的.

2. 证明如下的 Kaplansky 定理:设 φ: $R\to R^*$ 为环同态,$A^*\in {}_{R^*}\mathfrak{M}$,则

$$pd_R(A^*)\leqslant pd_R(R^*)+pd_{R^*}(A^*)$$

其中 A^* 的 R – 模结构由 $rx=\varphi(r)x,\forall r\in R,x\in A^*$ 给出.

(建议:先作 A^* 的 R^* – 模投射分解,再将每一项作 R – 模的投射分解,得双复形).

§3 Grothendieck 谱序列及其对群同调理论的应用

本节中主要介绍用函子合成与上节所讲过滤的方法,如何产生衰退的谱序列及这方面的一些应用.上节主要论及第一象限的双复形的同调,本节中我们改为主要讨论第三象限双复形的上同调.其实在方法上,上节方法用于第三象限或本节方法用于第一象限都是容易的(只需照顾到习惯上足码与肩码的倒置而已).

先介绍 Grothendieck 的下述定理,其中用到的范畴可理解为**足够内射**(enough injective)**的** Abel **范畴**(即满足下述条件的 Abel 范畴:对任意的该范畴对象 C 都有该范畴的一个内射对象 E 及单态射 $C\to E$,即 $0\to C\to E$ 正合.**足够投射的**定义可对偶地给出),它们也是足够投射的.初学的读者可将本节中的范畴都具体地理解为模范畴,这样便于接受,而且在方法上并无实质上的不同.

定理 1(Grothendieck) 设 $G:\mathscr{A}\to\mathscr{B},F:\mathscr{B}\to\mathscr{C}$ 为两个共变函子,F 为左正合的,且对 $\mathscr{A}$ 中的任意的内射对象 E,GE 都为右 F – 零调的(acyclic),即对任意的 $p\geqslant 1$,$(R^pF)(GE)=0$,则对 $\mathscr{A}$ 中的任意对象 A,必有第三象限谱序列 $\{E_r\}$ 使

$$E_2^{pq}=(R^pF)(R^qG(A))\underset{p}{\Rightarrow}R^n(FG)(A),\forall n=p+q$$

证 注意足够内射的 Abel 范畴中任意对象的内射分解显然都是存在的,令 A 的内射分解为

$$\mathbb{E}_A=0\to A\to E^0\to E^1\to\cdots\to E^p\to\cdots$$

以 G 作用 A 的对应的删项内射分解得复形

$$G\,\mathbb{E}_{\hat{A}}=0\to GE^0\to GE^1\to\cdots\to GE^p\to\cdots$$

用对偶于第三章§2 引理 1(马掌引理)的证法,记态射 $GE^i \to GE^{i+1}$ 的核与象各为 Z^i,B^{i+1},则可得如下的交换图

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
Z^0 & \rightarrowtail & GE^0 & \twoheadrightarrow & B^1 & \rightarrowtail & Z^1 & \rightarrowtail & GE^1 & \twoheadrightarrow & B^2 & \rightarrowtail \cdots \rightarrowtail & Z^p & \rightarrowtail & GE^p & \twoheadrightarrow & B^{p+1} \rightarrowtail Z^{p+1} \rightarrowtail GE^{p+1} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
K^{00} & \rightarrowtail & M^{00} & \twoheadrightarrow & L^{10} & \rightarrowtail & K^{10} & \rightarrowtail & M^{10} & \twoheadrightarrow & L^{20} & \rightarrowtail \cdots \rightarrowtail & K^{p0} & \rightarrowtail & M^{p0} & \twoheadrightarrow & L^{p+1,0} \rightarrowtail K^{p+1,0} \rightarrowtail M^{p+1,0} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
K^{01} & \rightarrowtail & M^{01} & \twoheadrightarrow & L^{11} & \rightarrowtail & K^{11} & \rightarrowtail & M^{11} & \twoheadrightarrow & L^{21} & \rightarrowtail \cdots \rightarrowtail & K^{p1} & \rightarrowtail & M^{p1} & \twoheadrightarrow & L^{p+1,1} \rightarrowtail K^{p+1,1} \rightarrowtail M^{p+1,1} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \quad \vdots \quad \vdots
\end{array}
$$

其中每列都是最上一元素的内射分解,而且对任意的 p.

$$K^{pr} \rightarrowtail M^{pr} \twoheadrightarrow L^{p+1,r}$$

都是正合的,于是有列正合的双复形

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & GE^0 & \to & GE^1 & \to & GE^2 & \to \cdots \to & GE^p & \to & GE^{p+1} & \to \cdots \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\multirow{5}{*}{$M\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right.$} & M^{00} & \to & M^{10} & \to & M^{20} & \to \cdots \to & M^{p0} & \to & M^{p+1,0} & \to \cdots \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & M^{01} & \to & M^{11} & \to & M^{21} & \to \cdots \to & M^{p1} & \to & M^{p+1,1} & \to \cdots \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}
$$

其中 M 表示删去第一行所得的双复形.

考察双复形 FM 与它的全复形 $\mathrm{Tot}(FM)$,用第一种过滤 ${}^{\mathrm{I}}F$.注意 M 中的第 p 列 $\{M^{p,*}\}$ 即 GE^p 的删项内射分解 $\mathbb{E}_{\widehat{GE^p}}$.于是用 F 作用后知,$\{FM^{p,*}\}$ 成复形.因此

$$H''^{pq}(FM) = H^q(FM^{p,*}) = (R^qF)(GE^p)$$

由于 E^p 为内射的,由已知条件知 GE^p 为右 F-零调的,因此

$$(R^qF)(GE^p) = 0, \quad \forall\, q > 0$$

但 F 为左正合的,于是 $R^0F \simeq F$(见第三章§2 命题 1′),从而有

$$H''^{pq}(FM) = \begin{cases} FG(E^p), & q = 0 \text{ 时(即 } p \text{ 轴上)} \\ 0, & q > 0 \text{ 时} \end{cases}$$

由此知求 H' 时只需求唯一的可能非零的行复形

$$0 \to FG(E^0) \to FG(E^1) \to FG(E^2) \to \cdots$$

的同调,所以有

$$^{\mathrm{I}}E_2^{pq} = \begin{cases} R^p(FG)(A), & q=0 \text{ 时} \\ 0, & q>0 \text{ 时} \end{cases}$$

即 $\{E_r\}$ 是衰退的第三象限谱序列. 由 §2 定理 5 知

$$H^n(\mathrm{Tot}(FM)) \simeq R^n(FG)(A) = E_2^{n,0} \tag{1}$$

再用第二种过滤 $^{\mathrm{II}}F$ (先算 H' 再算 H''). 为此仿上考察 Z^p, B^p 及 $H^p(G\mathbb{E}_{\hat{A}})$ 的内射分解:

$$0 \to Z^p \to K^{p0} \to K^{p1} \to \cdots \to K^{pq} \to \cdots$$

$$0 \to B^p \to L^{p0} \to L^{p1} \to \cdots \to L^{pq} \to \cdots$$

$$0 \to H^p(G\mathbb{E}_{\hat{A}}) \to H'^{p0} \to H'^{p1} \to \cdots \to H'^{pq} \to \cdots \tag{2}$$

互换 p, q, 得正合列

$$0 \to K^{qp} \to M^{qp} \xrightarrow{d'^{qp}} L^{qp} \to 0$$

由 K^{qp} 为内射的知此正合列可裂. 因此用 F 作用后仍可裂(因为 F 为函子,保态射合成与恒等态射). 又由 F 左正合知 F 保核. 因此

$$\mathrm{Ker}(Fd'^{qp}) = FK^{qp}$$

而由 G 作用于内射对象都是右 F-零调的这个已知条件知

$$\mathrm{Im}(Fd'^{q-1,p}) = FL^{qp}$$

于是有

$$H'^{qp}(FM) = H^q(FM^{*p}) = \mathrm{Ker}(Fd'^{qp})/\mathrm{Im}(Fd'^{q-1,p})$$
$$= FK^{qp}/FL^{qp}$$

另一方面,同理由 L^{qp} 为内射知,正合列

$$0 \to L^{qp} \to K^{qp} \to H'^{qp} \to 0$$

也是可裂的,于是

$$FH'^{qp} = FK^{qp}/FL^{qp}$$

由此与前一式知

$$H'^{qp}(FM) = FH'^{qp}$$

从而知

$$^{II}E_2^{pq} = H''^p H'^{qp}(FM) = H^p(FH'^{qp}) \tag{3}$$

但由(2)知,H'^{qp}均依次出现于$H^q(G\mathbb{E}_{\hat{A}})$的内射分解中.于是由右导出函子的定义(见第三章§2)知

$$H^p(FH'^{qp}) = (R^pF)(R^qG)(A) \tag{4}$$

故由(3)、(4)、(1)即知

$$(R^pF)(R^qG(A)) \underset{p}{\Rightarrow} R^n(FG)(A)$$

□

与上证类似地,可证下述几条产生 Grothendieck 谱序列的定理(下述各定理中的 $n = p + q$).

定理 2 设 $G:\mathscr{A}\to\mathscr{B}$, $F:\mathscr{B}\to\mathscr{C}$ 为两个共变函子,F 为右正合的且对 $\mathscr{A}$ 中的任意投射对象 P,GP 都是左 F - 零调的,则对 $\mathscr{A}$ 中的任意对象 A,都有第一象限谱序列

$$E_{pq}^2 = (L_pF)(L_qG(A)) \Rightarrow L_n(FG)(A)$$

定理 3 设 $F:\mathscr{B}\to\mathscr{C}$ 为反变左正合函子,$G:\mathscr{A}\to\mathscr{B}$ 为共变函子,且对 $\mathscr{A}$ 中任意的投射对象 P,GP 都是右 F - 零调的,则对 $\mathscr{A}$ 中的任意对象 A 都有第三象限谱序列

$$E_2^{pq} = (R^pF)(L_qG(A)) \underset{p}{\Rightarrow} R^n(FG)(A)$$

定理 4 设 $F:\mathscr{B}\to\mathscr{C}$ 为反变左正合函子,$G:\mathscr{A}\to\mathscr{B}$ 为反变函子且对 $\mathscr{A}$ 中的任意投射对象 P,GP 都是右 F - 零调的,则对 $\mathscr{A}$ 中的任意对象 A,都有第一象限谱序列

$$E_{pq}^2 = (R^pF)(R^qG(A)) \underset{p}{\Rightarrow} L_n(FG)(A)$$

定理 5 设 $G:\mathscr{A}\to\mathscr{B}$, $F:\mathscr{B}\to\mathscr{C}$ 为共变函子,F 为左正合的且对 $\mathscr{A}$ 中任意的内射对象 E,GE 都是左 F - 零调的,则对 $\mathscr{A}$ 中的任意对象 A,都有第三象限谱序列

$$E_2^{pq} = (L_pF)(R^qG(A)) \underset{p}{\Rightarrow} R^n(FG)(A)$$

上述的一些定理有着十分广泛的应用.下面仅介绍定理 1 对群的上同调理论的一些应用.在下节中再介绍这些定理在环模同调理论中的一些应用.

对 Abel 群,因为它们都是$\mathbb{Z}$－模(注意$\mathbb{Z}$是 PID,是一种有很丰富性质的环),一般地可使用环模的同调理论,对非 Abel 群,可以先构作一个群环(通常用$\mathbb{Z}$上的群环,即$\mathbb{Z}$上的群代数),然后再用环模的同调理论.为此我们先介绍一下群环的概念.

定义 1 设 R 为一个任意环,K 为一个运算为乘法的任意群(K 的运算为加法时也记为乘法),

$$RK = \{\sum_{<\infty} r_j k_j \mid r_j \in R, k_j \in K\}$$

中 $\sum_{<\infty} r_j k_j = \sum_{<\infty} r'_j k_j$ 是指对任意的 k_j,两边对应系数 r_j 与 r'_j 相等.RK 上有一个(使 RK 为群的)交换的加法运算且满足

$$\sum_{<\infty} r_j k_j + \sum_{<\infty} r'_j k_j = \sum_{<\infty} (r_j + r'_j) k_j$$

同时 RK 上又有一个乘法运算,定义为

$$(\sum_{<\infty} r_j k_j)(\sum_{<\infty} r'_j k_j) = \sum_{<\infty} r_i r'_j (k_i k_j)$$

此外,RK 上的这两种运算满足通常的加乘分配律,则 RK 称为 R 上关于 K 的**群环**(group ring).按常规办法还可定义 R 元素对 RK 元素的乘法,当 R 为交换环时,RK 又称为 R 上关于 K 的**群代数**(group algebra).

在群的同调理论中常用的是$\mathbb{Z}$上的群环,且将$\mathbb{Z}K$－模说成是 K－模.相应的 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}K}(\ ,\ )$也简记为 $\mathrm{Hom}_K(\ ,\ )$.下面我们使用如下三个范畴:

$$\mathscr{A} = {}_K\mathfrak{M} \equiv {}_{\mathbb{Z}K}\mathfrak{M}$$

$$\mathscr{B} = {}_Q\mathfrak{M} \equiv {}_{\mathbb{Z}Q}\mathfrak{M}$$

$$\mathscr{C} = {}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M} \equiv \mathbb{AG}$$

其中 Q 为 K 的一个商群,即有群的正合列

$$1 \to N \xrightarrow{i} K \xrightarrow{\pi} Q \to 1$$

(注意,从本章的§1 我们可看出,群 K 的同调性质在一定程度上可由其正规子群 N 及商群 Q 的同调性质决定).

对任意的群 K,我们都给$\mathbb{Z}$一个双$\mathbb{Z}K$－模结构,即定义

$$n\left(\sum_{<\infty} n_j k_j\right) = \left(\sum_{<\infty} n_j k_j\right) n = \left(\sum_{<\infty} n_j\right) n, \quad \forall n \in \mathbb{Z} \tag{5}$$

于是我们可取定理 1 中的两个函子为

$$G = \mathrm{Hom}_N(\mathbb{Z}, -): \mathscr{A} \to \mathscr{B}$$

$$F = \mathrm{Hom}_Q(\mathbb{Z}, -): \mathscr{B} \to \mathscr{C}$$

对任意的 $A \in \mathscr{A}$,有

引理 1　设 K 为任一乘法群,$A \in {}_K\mathfrak{M}$,则

$$\mathrm{Hom}_K(\mathbb{Z}, A) \simeq A^K \equiv \{a \in A \mid \forall x \in K, xa = a\}.$$

证　任取 $f \in \mathrm{Hom}_K(\mathbb{Z}, A)$,显然 f 由 $f(1) \in A$ 唯一确定($n \geqslant 0$ 时 $f(n)$ 为 n 个 $f(1)$ 之和. $n < 0$ 时 $f(n)$ 为 $(-n)$ 个 $-f(1)$ 之和). 记 $f(1) = a \in A$. 则由 $\mathbb{Z}$ 的 $\mathbb{Z}K$ - 模(即 K - 模)结构的定义(5)知,在 $\mathbb{Z}$ 中,对任意的 $x \in K$, $x \cdot 1 = 1$. 因此

$$a = f(1) = f(x \cdot 1) = xf(1) = xa, \quad \forall x \in K$$

反过来,若对任意的 $x \in K$ 恒有 $xa = a$,则由 $f(n) = na$ 即得 $f \in \mathrm{Hom}_K(\mathbb{Z}, A)$,于是令 $f \mapsto f(1)$,即得

$$\mathrm{Hom}_K(\mathbb{Z}, A) \simeq A^K$$

□

由引理 1 知

$$\begin{aligned} FG(A) &= \mathrm{Hom}_Q(\mathbb{Z}, \mathrm{Hom}_N(\mathbb{Z}, A)) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_Q(\mathbb{Z}, A^N) \\ &\simeq (A^N)^Q \simeq A^K \\ &\simeq \mathrm{Hom}_K(\mathbb{Z}, A) \end{aligned}$$

于是

$$\mathscr{A} \xrightarrow[G = \mathrm{Hom}_N(\mathbb{Z}, -)]{} \mathscr{B} \xrightarrow[F = \mathrm{Hom}_Q(\mathbb{Z}, -)]{} \mathscr{C}$$

即

$$\mathscr{A} \xrightarrow[FG = \mathrm{Hom}_K(\mathbb{Z}, -)]{} \mathscr{C}$$

作 $A \in {}_K\mathfrak{M}$ 的内射分解

$$0 \to A \to I^0 \to I^1 \to I^2 \to \cdots$$

用 G 作用后得复形

$$\mathrm{Hom}_N(\mathbb{Z},A)\to\mathrm{Hom}_N(\mathbb{Z},I^0)\to\mathrm{Hom}_N(\mathbb{Z},I^1)\to\cdots$$

按

$$\pi(x)\cdot a=xa,\quad \forall x\in K,a\in A$$

知,上面的复形又为${}_Q\mathfrak{M}$复形.同时

$$R^mG(A)=H^m(N,A)$$

同理

$$R^mF(B)=H^m(Q,B)$$

$$R^m(FG)(A)=H^m(K,A)$$

此外,显然,F,G 满足定理 1 的条件,因此我们已得到如下的重要结果

推论 1 (Lyndon－Hochschild－Serre 定理,1953 年).

设

$$1\to N\to K\to Q\to 1$$

为乘法群的短正合列,$A\in{}_K\mathfrak{M}$,则有谱序列

$$E_2^{pq}=H^p(Q,H^q(N,A))\underset{p}{\Rightarrow}H^n(K,A),\quad n=p+q$$

由此又一次地看出:群 K 的上同调在一定程度上由其正规子群及其商群的上同调决定.

类似地,可得同调谱序列

推论 2 在推论 1 的条件下,有谱序列

$$E_{pq}^2=H_p(Q,H_q(N,A))\underset{p}{\Rightarrow}H_n(K,A),\quad n=p+q$$

下面我们举例说明推论 1 的具体应用.先给出如下定义

定义 2 设 K 为任一群,对$\mathbb{Z}$由(5)给出的 K－模($\mathbb{Z}K$－模)结构,记

$$\mathrm{cd}K=\mathrm{pd}_{\mathbb{Z}K}\mathbb{Z}$$

并称为群 K 的**上同调维数**(cohomological dimension)

由前两章知

$\mathrm{cd}K=\inf\{n\mid\mathbb{Z}\in{}_K\mathfrak{M}$ 有长为 n 的投射分解$\}$

$$=\inf\{n \mid H^i(K,-)=0, \forall i>n\}$$
$$=\inf\{n \mid \mathrm{Ext}^i_{\mathbb{Z}K}(\mathbb{Z},-)=0, \forall i>n\}$$
$$=\sup\{n \mid H^n(K,A)\neq 0,\text{对某一个 } A\in {}_K\mathfrak{M}\}$$
$$=\sup\{n \mid \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}K}(\mathbb{Z},A)\neq 0,\text{对某一个 } A\in {}_K\mathfrak{M}\}$$

事实上,对 $A\in {}_K\mathfrak{M}$,在群的同调理论中称

$$H^n(K,A)=\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}K}(\mathbb{Z},A)$$

为群 K 系数在 A 中的第 n 个(n 维)**上同调群**(cohomological group).类似地,称

$$H_n(K,A)=\mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}K}(\mathbb{Z},A)$$

为群 K 系数在 A 中的第 n 个(n 维)**同调群**(homological group),且称

$\mathrm{hd}K=\sup\{n \mid \mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}K}(\mathbb{Z},A)\neq 0,\text{对某一个 } A\in {}_K\mathfrak{M}\}$ 为群 K 的**同调维数**(homological dimension),显然

$$\mathrm{hd}K\leqslant \mathrm{cd}K$$

用推论 1 可证明如下命题

命题 1 设

$$1\to N\to K\to Q\to 1$$

为任一个群的短正合列,则

$$\mathrm{cd}K\leqslant \mathrm{cd}N+\mathrm{cd}Q$$

因此,对任意群 G,若 $\mathrm{cd}G<\infty$,则 $\mathrm{cd}G^n\leqslant n\,\mathrm{cd}G$,其中 $G^n=\underbrace{G\times\cdots\times G}_{n}$ 为群 G 的 n 次直幂(有时也记为 $G^n=\underbrace{G\oplus\cdots\oplus G}_{n}$).

证 记 $\mathrm{cd}N=a,\mathrm{cd}Q=b$ 只需就 $a<\infty,b<\infty$ 的情况证 $\mathrm{cd}K\leqslant a+b$.

事实上,由推论 1 知,有谱序列

$$E_2^{pq}=H^p(Q,H^q(N,A))\underset{p}{\Rightarrow}H^{p+q}(K,A),\qquad \forall A\in {}_K\mathfrak{M}$$

而由 $\mathrm{cd}N=a,\mathrm{cd}Q=b$ 知,非零的 E_2^{pq} 只能出现在足码满足 $0\leqslant p\leqslant b,0\leqslant q\leqslant a$ 的范围内,因此 $p+q\leqslant a+b$.由此知,对一切 $n=$

$p+q>a+b, H^n(K,A)=0$,故 $\mathrm{cd}K\leqslant a+b$.

□

设 $K=\mathbb{Z}$(加法群),则由$\mathbb{Z}K$ 的定义(将$\mathbb{Z}$视为同构的乘法群)知,此时

$$\mathbb{Z}K\simeq\mathbb{Z}[x,x^{-1}]$$

称为$\mathbb{Z}$上的 Laurent **多项式环**.一般地,$K=\mathbb{Z}^n$时,

$$\mathbb{Z}K\simeq\mathbb{Z}[x_1,x_1^{-1};x_2,x_2^{-1};\cdots,x_n,x_n^{-1}]$$

可以算出

$$H^n(\mathbb{Z}^n,\mathbb{Z})\simeq\mathbb{Z}$$

因此,由命题 1 用归纳法立即得

推论 3 $\mathrm{cd}\,\mathbb{Z}^n=n$.

下面我们看看上同调维数为 0、1 的群有些什么样的结构?我们先来证明如下命题

命题 2 设 K 为任意群,则

$$\mathrm{cd}K=0\Leftrightarrow K=\{e\}\text{为平凡(一元)群}$$

证 $\Rightarrow$:对任意的群 K 都有$\mathbb{Z}K$-模正合列

$$0\to I\rightarrowtail\mathbb{Z}K\xrightarrow[\varepsilon]{}\mathbb{Z}\to 0\tag{6}$$

其中 ε 的定义为

$$\varepsilon(\sum_{<\infty}n_jk_j)=\sum_{<\infty}n_j$$

$I=\langle\{k-1\mid k\neq e,k\in K\}\rangle$称为群环$\mathbb{Z}K$ 的**增广理想**(augmentation ideal).若 $\mathrm{cd}K=0$,则由第二章,§1,命题 6(Schanuel 引理)知 $\mathbb{Z}\in\mathrm{P}_{\mathbb{Z}K}\mathfrak{M}$.于是(6)是可裂的(见第二章.§1.定理 1),即有 $f\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_K}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}K)$使

$$\varepsilon f=I_{\mathbb{Z}}$$

因此 f 是单同态.

令 $f(1)=x\in\mathbb{Z}K$,则有

$$f(m)=f(mk\cdot 1)=mkx,\quad\forall k\in K,m\in\mathbb{Z}$$

取 $m=1$,由 f 是单的知

$$kx = x, \quad \forall k \in K$$

故 $K = \{e\}$为平凡群.

$\Leftarrow$是显然的.

□

对命题2的证明中用到的增广理想 I,在 K 为任意群的情况下容易看出:作为$\mathbb{Z}$-模(Abel 群),I 是自由的,其基即$\{k-1 \mid e \neq k \in K\}$.当 K 为以集合 X 作基的自由群(一般地,不是 Abel 群!)时,由

$$xy - 1 = (x-1)y + (y-1)$$
$$x^{-1} - 1 = -(x-1)x^{-1}$$

知,$\{x-1 \mid e \neq x \in X\}$为 I 作为$\mathbb{Z}K$-模的生成系.此外可以证明此时作为$\mathbb{Z}K$-模,I 也是自由的,其基即$\{x-1 \mid e \neq x \in X\}$.于是由(6)可得

命题3 设 K 为自由群,则 $\mathrm{cd}K \leqslant 1$.

注1 J.R.Stalling(1968年)与 R.Swan(1969年)证明了命题3之逆也是成立的.因此当 K 非平凡时,$\mathrm{cd}K = 1 \Leftrightarrow K$ 为自由群.

再来看看有限循环群的上同调维数.

设 K 为 m 阶循环群,k 为它的生成元,即 $K = (k)$.我们记

$$\tau = 1 - k$$
$$\mu = 1 + k + k^2 + \cdots + k^{m-1}$$

显然,用 τ, μ 作($\mathbb{Z}K$ 中的)右乘得到$\mathbb{Z}K$ 上的两个$\mathbb{Z}K$-模的自同态.为简便起见,仍用 τ, μ 记这两个自同态.取$\mathbb{Z}K$ 中的任一元素

$$\gamma = \sum n_j k^j$$

对(5)中的 ε,我们有

$$\gamma\mu = \varepsilon(\gamma)\mu$$
$$\gamma\tau = \sum (n_j - n_{j-1})k^i$$

这里,我们约定 $n_{-1} = n_{m-1}$.于是

$$\mathrm{Ker}\mu = \mathrm{Ker}\varepsilon = \mathrm{Im}\tau$$
$$\mathrm{Ker}\tau = \mathrm{Im}\mu = \mathbb{Z}\,\mu$$

由此知,我们有无限长的$\mathbb{Z}K$-模投射分解:

$$\cdots\to\mathbb{Z}K\xrightarrow{\tau}\mathbb{Z}K\xrightarrow{\mu}\mathbb{Z}K\xrightarrow{\tau}\cdots\xrightarrow{\mu}\mathbb{Z}K\xrightarrow{\tau}\mathbb{Z}K\xrightarrow{\varepsilon}\mathbb{Z}\to 0$$

因此 K 的上同调群是周期性变化的,再注意到对任意的 $A\in{}_{\mathbb{Z}K}\mathfrak{M}$.

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}K}(\mathbb{Z}K,A)\simeq A$$
$$f\longmapsto f(1)$$

用第一章§1例4中的记号,由上同调群的定义知

$$H^{2n-1}(K,A)=\mathrm{Ker}\mu^*/\mathrm{Im}\tau^*$$
$$H^{2n}(K,A)=\mathrm{Ker}\tau^*/\mathrm{Im}\mu^*$$

取 $A=\mathbb{Z}$,则对任意的 $t\in\mathbb{Z}$,

$$t\mu=tm$$
$$t\tau=0(\text{注意}\mathbb{Z}\in{}_{\mathbb{Z}K}\mathfrak{M}\text{ 的定义}(5))$$

故

$$H^{2n-1}(K,\mathbb{Z})=0$$
$$H^{2n}(K,\mathbb{Z})\simeq\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$$

由此得

命题 4 设 $K=(k)$为 m 阶循环群,$m<\infty$,则 $\mathrm{cd}K=\infty$.

至此,很自然地要问:对一个群 K,若 $\mathrm{cd}K<\infty$,K 应该具备什么性质? 为了讨论这一问题,我们先注意对 K 的任一子群 H,$\mathbb{Z}K$ 有常规的$\mathbb{Z}H$-模结构.用 K 关于 H 的陪集分解可知,$\mathbb{Z}K$ 事实上是自由$\mathbb{Z}H$-模.因此,投射的$\mathbb{Z}K$-模(自由$\mathbb{Z}K$-模的直和项)必为投射的$\mathbb{Z}H$-模.由此知$\mathbb{Z}$关于$\mathbb{Z}K$-模的投射分解也必为关于$\mathbb{Z}H$-模的投射分解,这样我们就得到如下结果.

命题 5 设 H 为任意群K 的子群,则

$$\mathrm{cd}H\leqslant\mathrm{cd}K$$

由命题5与命题1立得如下推论.

推论 4 设 $1\to N\to K\to Q\to 1$ 为任一个群的短正合列,则

$$\mathrm{cd}N\leqslant\mathrm{cd}K\leqslant\mathrm{cd}N+\mathrm{cd}Q$$

现在不难证出如下结果

命题 6 设 K 为群且 $\mathrm{cd}K<\infty$,则 K 为无挠群.

证 反设 K 有挠元素 k,则有限阶循环群 $H=(k)$ 为 K 的子群,由命题 5 知

$$\mathrm{cd}H\leqslant \mathrm{cd}K<\infty$$

这与命题 4 矛盾。故 K 只能为无挠群.

□

最后,我们通过计算下例中群的上同调维数再次说明命题 1(事实上是推论 1 的)的应用.

例 设

$$K=\begin{pmatrix}1 & \mathbb{Z} & \mathbb{Z}\\ 0 & 1 & \mathbb{Z}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

为乘法群,求 $\mathrm{cd}K$.

事实上,我们取

$$N=\begin{pmatrix}1 & 0 & \mathbb{Z}\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\simeq\mathbb{Z}\,(\text{加法群})$$

则 $N\lhd K$ 且

$$Q=K/N\simeq\mathbb{Z}^2$$

由命题 1 与推论 3 知

$$\mathrm{cd}K\leqslant\mathrm{cd}N+\mathrm{cd}Q=1+2=3$$

可以算出

$$H^3(K,\mathbb{Z})\simeq\mathbb{Z}\neq 0$$

故

$$\mathrm{cd}K=3$$

对群的上同调有兴趣的读者可再读[B,82]有关章节.

习 题 4.3

1. 证明:对任意的群 G,$\mathbb{Z}$ 作为$\mathbb{Z}G$-模都有长为 $\mathrm{cd}G$ 的自由分解.(建

议:先证,对任意环 R,若 $P\in \mathrm{P}_R\mathfrak{M}$,则有 $F\in \mathrm{Free}_R\mathfrak{M}$.使 $P\oplus F\simeq F$ 为左 R-模同构(此法称为 Eilenberg 技巧,ch2,§1),再注意应用 Schanuel 引理).

2. 详细地给出本节推论 2 的证明.

§4 Grothendieck 谱序列对环模同调的应用

本节中我们继续介绍 Grothendieck 谱序列的更深入的应用.首先我们指出,由谱序列可产生一些有用的正合列.

定理 1 设 $\{E^r\}$ 为(R-模范畴的)第一象限谱序列,且

$$E^2_{pq}\underset{p}{\Rightarrow}H_n(M)$$

则

(i) 对任意的 n,有一系列的满同态

$$E^2_{0,n}\twoheadrightarrow E^3_{0,n}\twoheadrightarrow E^4_{0,n}\twoheadrightarrow\cdots\twoheadrightarrow E^r_{0,n}$$

因此有满同态(称为**边缘同态**(edge homomorphism))

$$E^2_{0,n}\twoheadrightarrow E^\infty_{0,n}$$

(ii) 对任意的 n,有一系列的单同态

$$E^r_{n,0}\rightarrowtail E^{r-1}_{n,0}\rightarrowtail E^{r-2}_{n,0}\rightarrowtail\cdots\rightarrowtail E^3_{n,0}\rightarrowtail E^2_{n,0}$$

因此又有单同态(也称为**边缘同态**)

$$E^\infty_{n,0}\rightarrowtail E^2_{n,0}$$

(iii) 对任意的 n,有单同态

$$E^\infty_{0,n}\rightarrowtail H_n(M)$$

(iv) 对任意的 n,有满同态

$$H_n(M)\twoheadrightarrow E^\infty_{n,0}$$

(v) 有正合列

$$H_2(M)\to E^2_{2,0}\xrightarrow{d^2}E^2_{0,1}\to H_1(M)\to E^2_{10}\to 0$$

证 (i) 由本章§1 定理 1 知

$$E^r_{pq}=\mathrm{Ker}d^{r-1}_{pq}/\mathrm{Im}d^{r-1}_{p+r-1,q-r+2}$$

因此

$$E_{0,n}^{3}=\operatorname{Ker}d_{0,n}^{2}/\operatorname{Im}d_{2,n-1}^{2} \tag{1}$$

但由本章§1定理1又知

$$\operatorname{bideg}d^{r}=(-r,r-1)$$

于是有

$$d_{0,n}^{2}:E_{0,n}^{2}\to E_{-2,n+1}^{2}=0$$

($\{E^{r}\}$为第一象限谱序列).

即 $d_{0,n}^{2}=0$,从而

$$\operatorname{Ker}d_{0,n}^{2}=E_{0,n}^{2} \tag{2}$$

由(1),(2)知有满同态

$$E_{0,n}^{2}\twoheadrightarrow E_{0,n}^{3}$$

同理可证其它的满同态存在.

(ii) 对偶于(i)的证明,注意由$\{E^{r}\}$为第一象限谱序列知 $\operatorname{Im}d_{n+2,-1}^{2}=0$,从而

$$\begin{aligned}E_{n,0}^{3}&=\operatorname{Ker}d_{n,0}^{2}/\operatorname{Im}d_{n+2,-1}^{2}\\&=\operatorname{Ker}d_{n,0}^{2}\subset E_{n,0}^{2}\end{aligned}$$

即可依此类推证出(ii).

(iii) 由条件与谱序列收敛定义知,必有有界过滤 $\{\Phi^{p}H_{n}(M)\}$使

$$E_{0,n}^{\infty}\simeq\Phi^{0}H_{n}(M)/\Phi^{-1}H_{n}(M)$$

由本章§2定理2之证知对第一象限谱序列取 $s(n)=-1$,因此

$$\Phi^{-1}H_{n}(M)=0.$$

于是

$$E_{0,n}^{\infty}\simeq\Phi^{0}H_{n}(M)\subset H_{n}(M)$$

因此(iii)成立.

(iv) 与(iii)之证类似,注意取 $t(n)=n$,得

$$\begin{aligned}E_{n,0}^{\infty}&\simeq\Phi^{n}H_{n}(M)/\Phi^{n-1}H_{n}(M)\\&=H_{n}(M)/\Phi^{n-1}H_{n}(M)\end{aligned}$$

于是(iv)成立.

(v) 显然有正合列

$$0 \to \mathrm{Ker}d_{2,0}^2 \to E_{2,0}^2 \xrightarrow{d^2} E_{0,1}^2 \to \mathrm{Coker}d_{2,0}^2 \to 0$$

由$\{E^r\}$为第一象限谱序列知 $\mathrm{Im}d_{4,-1}^2 = 0$. 因此

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}d_{2,0}^2 &= \mathrm{Ker}d_{2,0}^2 / \mathrm{Im}d_{4,-1}^2 \\ &\doteq E_{2,0}^3\end{aligned}$$

同理知

$$E_{2,0}^m \doteq \mathrm{Ker}d_{2,0}^{m-1}$$

但 $m \geqslant 3$ 时由 $\mathrm{bideg}d^r = (-r, r-1)$知

$$d_{2,0}^m : E_{2,0}^m \to E_{2-m,m-1} = 0 \text{ (注意 } 2-m<0\text{)}$$

因此　$m \geqslant 3$ 时,

$$\mathrm{Ker}d_{2,0}^m = E_{2,0}^m$$

于是必有充分大的 r 使

$$E_{2,0}^\infty = E_{2,0}^r = E_{2,0}^{r-1} = \cdots = E_{2,0}^3$$

另一方面,由(iv)知必有满同态

$$H_2(M) \twoheadrightarrow E_{2,0}^\infty$$

故有正合列

$$H_2(M) \to E_{2,0}^2 \xrightarrow{d^2} E_{0,1}^2$$

再注意

$$\begin{aligned}\mathrm{Coker}d_{2,0}^2 &= E_{0,1}^2 / \mathrm{Im}d_{2,0}^2 \\ &= \mathrm{Ker}d_{0,1}^2 / \mathrm{Im}d_{2,0}^2 \\ &= E_{0,1}^3\end{aligned}$$

仿上迭代式的论证知

$$E_{0,1}^\infty = \cdots = E_{0,1}^3 = \mathrm{Coker}d_{2,0}^2$$

这就证出了正合列

$$H_2(M) \to E_{2,0}^2 \xrightarrow{d^2} E_{0,1}^2 \to E_{0,1}^\infty \to 0 \tag{3}$$

注意

$$H_1(M)=\Phi^1 H_1(M)$$
$$E^\infty_{1,0}=\Phi^1 H_1(M)/\Phi^0 H_1(M)$$
$$E^\infty_{0,1}=\Phi^0 H_1(M)/\Phi^{-1} H_1(M)$$

我们立得

$$H_1(M)/E^\infty_{0,1}\simeq E^\infty_{1,0}$$

即有正合列

$$0\to E^\infty_{0,1}\to H_1(M)\to E^\infty_{1,0}\to 0 \tag{4}$$

由(3),(4)得正合列

$$H_2(M)\to E^2_{2,0}\xrightarrow{d^2}E^2_{0,1}\to H_1(M)\to E^\infty_{1,0}\to 0$$

最后,再用 $\mathrm{bideg}\,d^r=(-r,r-1)$仿上可证(注意$\{E^r\}$为第一象限谱序列)

$$E^\infty_{1,0}=E^2_{1,0}$$

这样就证出了(v).

□

对偶于定理 1,可证

定理 2 设$\{E_r\}$为(R-模范畴的)第三象限谱序列,且

$$E_2^{pq}\underset{p}{\Rightarrow}H^n(M)$$

则有正合列

$$0\to E_2^{1,0}\to H^1(M)\to E_2^{0,1}\xrightarrow{d_2}E_2^{2,0}\to H^2(M)$$

定理 1 与定理 2 有助于计算相关复形 M 的同调与上同调,它们对足够内射(投射)的 Abel 范畴也是成立的.论证的方法不需作实质性的改变,而且可得到如下的重要推论

推论 1 (同调五项列定理)设 $G:\mathscr{A}\to\mathscr{B}$, $F:\mathscr{B}\to\mathscr{C}$ 都是右正合共变函子,且对 $\mathscr{A}$ 中的一切投射对象 P, $G(P)$为左 F-零调的,则对任意的 $A\in\mathscr{A}$ 都有五项正合列

$$L_2(FG)(A)\to(L_2F)(G(A))\to F(L_1G(A))\to L_1(FG)(A)$$
$$\to(L_1F)(G(A))\to 0$$

证 由上节定理 2 知,有第一象限谱序列

$$E_{pq}^{2}=(L_pF)(L_qG(A))\underset{p}{\Rightarrow}L_n(FG)(A)$$

视 $H_n=L_n(FG)$,用定理 1 即得证. □

推论 2 (上同调五项定理)设 $G:\mathscr{A}\to\mathscr{B}$, $F:\mathscr{B}\to\mathscr{C}$ 都是左正合共变函子,且对 $\mathscr{A}$ 中的任意内射对象 E, $G(E)$ 为右 F－零调的,则对任意的 $A\in\mathscr{A}$ 有五项正合列

$$0\to(R^1F)(G(A))\to R^1(FG)(A)\to F(R^1G(A))\to$$
$$(R^2F)(G(A))\to R^2(FG)(A)$$

证 由上节定理 1 知,有第三象限谱序列

$$E_2^{pq}=(R^pF)(R^qG(A))\underset{p}{\Rightarrow}R^n(FG)(A)$$

视 $H^n=R^n(FG)$,用定理 2 即得证.

□

下面我们均设 R,S 为环,来介绍一下谱序列(特别是衰退谱序列)在环模理论中的一些应用.所得的一些结果用其他方法也可证明,但这里的证明相对而言要简单得多,而且更具有机械性的程序,对掌握谱序列的读者来讲是更加容易掌握的方法.

我们先设 $A\in\mathfrak{M}_R$, $B\in{}_R\mathfrak{M}_S$, $C\in{}_S\mathfrak{M}$. 取函子 F,G 为

$$F=A\underset{R}{\otimes}-:\ {}_R\mathfrak{M}\to\mathbb{A}\,G$$

$$G=B\underset{S}{\otimes}-:\ {}_S\mathfrak{M}\to{}_R\mathfrak{M}$$

由张量积的结合性

$$A\underset{R}{\otimes}(B\underset{S}{\otimes}C)\simeq(A\underset{R}{\otimes}B)\underset{S}{\otimes}C$$

知, F 与 G 的合成为

$$FG=(A\underset{R}{\otimes}B)\underset{S}{\otimes}-:\ {}_S\mathfrak{M}\to\mathbb{A}\,G$$

显然, F 为右正合的,于是在对任意的 $P\in\mathrm{P}_S\mathfrak{M}$, GP 为左 F－零调的条件下用上节定理 2 可得一个有用的谱序列,即

定理 3. 设 $A\in\mathfrak{M}_R$, $B\in{}_R\mathfrak{M}_S$ 满足

$$\mathrm{Tor}_i^R(A,B\underset{S}{\otimes}P)=0,\quad \forall\, i>0,\forall\, P\in\mathrm{P}_S\mathfrak{M}$$

则有第一象限谱序列(其中 C 为任意的左 S-模):

$$\mathrm{Tor}_p^R(A,\mathrm{Tor}_q^S(B,C))\underset{p}{\Rightarrow}\mathrm{Tor}_n^S(A\underset{R}{\otimes}B,C),\quad n=p+q$$

由此结果我们立得如下重要的同构关系

推论 3 设 $A\in\mathrm{Flat}\mathfrak{M}_R, B\in{}_R\mathfrak{M}_S, C\in{}_S\mathfrak{M}$,则

$$A\underset{R}{\otimes}\mathrm{Tor}_n^S(B,C)\simeq\mathrm{Tor}_n^S(A\otimes B,C)$$

证 由 A 的平坦性知,对定理 3 中的谱序列

$$E_{pq}^2=\mathrm{Tor}_p^R(A,\mathrm{Tor}_q^S(B,C))=0,\quad \forall p>0$$

因此,这个谱序列是衰退的,于是由本章 §2 定理 5 知

$$E_{0,n}^2\simeq H_n(\mathrm{Tot}(M))$$

显然地,

$$E_{0,n}^2=A\underset{R}{\otimes}\mathrm{Tor}_n^S(B,C)$$

而由本章 §3 定理 2 知

$$H_n(\mathrm{Tot}(M))\simeq L_n(FG)(A)=\mathrm{Tor}_n^S(A\otimes B,C)$$

故

$$A\underset{R}{\otimes}\mathrm{Tor}_n^S(B,C)\simeq\mathrm{Tor}_n^S(A\otimes B,C)$$

□

类似于定理 3,用函子

$$\Gamma=-\underset{R}{\otimes}B:\mathfrak{M}_R\to\mathfrak{M}_S$$

$$\Phi=-\underset{S}{\otimes}C:\mathfrak{M}_S\to\mathbb{A}\mathrm{G}$$

通过函子⊗的(同构)结合性得合成

$$\Phi\Gamma=-\underset{R}{\otimes}(B\underset{S}{\otimes}C)$$

于是有相应的 Grothendieck 谱序列定理:

定理 4 设 $B\in{}_R\mathfrak{M}_S, C\in{}_S\mathfrak{M}$ 满足

$$\mathrm{Tor}_i^S(Q\underset{R}{\otimes}B,C)=0,\quad \forall i>0,\forall Q\in\mathrm{P}\mathfrak{M}_R$$

则有第一象限谱序列

$$\mathrm{Tor}_p^S(\mathrm{Tor}_q^R(A,B),C)\underset{p}{\Rightarrow}\mathrm{Tor}_n^R(A,B\underset{S}{\otimes}C)$$

可以看出,当 $B\in{}_R\mathfrak{M}_S$ 为平坦左 R-模时,由定理 2 中的 Q

$\in \mathrm{P}\mathfrak{M}_R \subset \mathrm{Flat}\mathfrak{M}_R$ 知

$$Q \underset{R}{\otimes} B \in \mathrm{Flat}\mathfrak{M}_S$$

于是定理 4 的条件成立且其中的谱序列是衰退的.因此

$$\mathrm{Tor}_n^S(A \underset{R}{\otimes} B, C) \simeq \mathrm{Tor}_n^R(A, B \underset{S}{\otimes} C)$$

而当 $B \in {}_R\mathfrak{M}_S$ 为平坦右 S－模时,类似地用定理 3 也得上述的同构.故得一有用的推论:

推论 4 设 $B \in {}_R\mathfrak{M}_S$ 为平坦左 R－模或平坦右 S－模,$C \in {}_S\mathfrak{M}$,$A \in \mathfrak{M}_R$,则

$$\mathrm{Tor}_n^S(A \underset{R}{\otimes} B, C) \simeq \mathrm{Tor}_n^R(A, B, \underset{S}{\otimes} C)$$

这事实上是$\otimes$的结合性在重要情况下的推广.

由前已可看出,谱序列(尤其是在一定条件下衰退的谱序列)犹如"公式"一样有着方便而重要的应用.因此知道的谱序列愈多,我们可用的方便工具也就愈多.

下面对 $A \in {}_R\mathfrak{M}$,$B \in {}_S\mathfrak{M}_R$,$C \in {}_S\mathfrak{M}$ 取函子

$$G = B \underset{R}{\otimes} —, \quad F = \mathrm{Hom}_S(—, C)$$

由第二章 §3 定理 5(伴随同构定理)知

$$\mathrm{Hom}_S(B \underset{R}{\otimes} A, C) \simeq \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_S(B, C))$$

于是有函子合成

$$FG = \mathrm{Hom}_S(—, \mathrm{Hom}_R(B, C))$$

容易看出,F 为左正合的.因此由上节定理 3 即得

定理 5 设 $B \in {}_S\mathfrak{M}_R$,$C \in {}_S\mathfrak{M}$ 满足

$$\mathrm{Ext}_S^i(B \underset{R}{\otimes} P, C) = 0, \quad \forall i > 0, \forall P \in \mathrm{P}_R\mathfrak{M}$$

则对任意的 $A \in {}_R\mathfrak{M}$ 有第三象限谱序列

$$\mathrm{Ext}_R^p(\mathrm{Tor}_q^S(B, A), C) \underset{p}{\Rightarrow} \mathrm{Ext}_R^n(A, \mathrm{Hom}_S(B, C)), \; n = p + q$$

类似地,取函子

$$\Gamma = \mathrm{Hom}_S(B, —)$$

$$\Phi = \mathrm{Hom}_R(A, —)$$

用伴随同构定理知,其合成为

$$\Phi\Gamma = \mathrm{Hom}_S(B\otimes A, —)$$

于是用上节定理 1 又得

定理 6 设 $A \in {}_R\mathfrak{M}, B \in {}_S\mathfrak{M}_R$ 满足

$$\mathrm{Ext}_R^i(A, \mathrm{Hom}_S(B, Q)) = 0, \quad \forall\, i > 0, \forall\, Q \in \mathrm{Inj}_S\mathfrak{M}$$

则对任意的 $C \in {}_S\mathfrak{M}$ 有第三象限谱序列

$$\mathrm{Ext}_R^p(A, \mathrm{Ext}_S^q(B, C)) \underset{p}{\Rightarrow} \mathrm{Ext}_S^n(B \underset{R}{\otimes} A, C); \quad n = p + q$$

作为定理 5 与定理 6 的应用,我们考察 $B \in {}_S\mathfrak{M}_R$ 为投射右 R - 模且为投射左 S - 模的情况. 当 B 为投射右 R - 模知,对任意的 $P \in \mathrm{P}_R\mathfrak{M}$,当然有 $B \underset{R}{\otimes} P \in \mathrm{P}_S\mathfrak{M}$. 因此定理 5 的条件是满足的. 由 B 为投射右 R - 模知,当然更是平坦右 R - 模,因此由第二章 §3 命题 5 知,$\mathrm{Hom}_R(B, Q)$ 对任意的 $Q \in \mathrm{Inj}_S\mathfrak{M}$ 都是内射左 R - 模,于是定理 6 的条件是满足的. 故由定理 5、定理 6 可得下述的重要同构.

推论 5 设 $B \in {}_S\mathfrak{M}_R$ 为投射左 S - 模且为投射右 R - 模,则对任意的 $A \in {}_R\mathfrak{M}$ 与 $C \in {}_S\mathfrak{M}$ 有

$$\mathrm{Ext}_R^n(A, \mathrm{Hom}_S(B, C)) \simeq \mathrm{Ext}_S^n(B \underset{R}{\otimes} A, C)$$

这事实上是在上述重要情况下伴随同构定理的推广. 类似地,我们可得如下结果

推论 6 (i) 设 $A \in {}_R\mathfrak{M}, B \in {}_S\mathfrak{M}_R, C \in \mathrm{Inj}_S\mathfrak{M}$. 则

$$\mathrm{Hom}_S(\mathrm{Tor}_n^R(B, A), C) \simeq \mathrm{Ext}_R^n(A, \mathrm{Hom}_S(B, C))$$

(ii) 设 $A \in \mathrm{P}_R\mathfrak{M}, B \in {}_S\mathfrak{M}_R, C \in {}_S\mathfrak{M}$,则

$$\mathrm{Ext}_S^n(B \underset{R}{\otimes} A, C) \simeq \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Ext}_S^n(B, C))$$

推论 7 设 R 为左 Noether 环,$A \in \mathrm{f.g.}\,{}_R\mathfrak{M}, B \in {}_R\mathfrak{M}_S$. $C \in \mathrm{Inj}\mathfrak{M}_S$. 则有同构

$$\mathrm{Hom}_S(\mathrm{Ext}_R^n(A, B), C) \simeq \mathrm{Tor}_n^R(\mathrm{Hom}_S(B, C), A)$$

证 由设与第二章 §3 定理 11 知 $A \in \mathrm{f.p.}\,{}_R\mathfrak{M}$. 于是定义

$$\sigma_A:\mathrm{Hom}_S(B,C)\underset{R}{\otimes}A\to\mathrm{Hom}_S(\mathrm{Hom}_R(A,B),C)$$

使对任意的 $f\in\mathrm{Hom}_S(B,C)$ 与 $a\in A$,

$$\sigma_A(f\otimes a)(g)=fg(a),\quad \forall g\in\mathrm{Hom}_R(A,B)$$

可以证明(参看[R,79,p.91]) σ_A 为一个自然的同构.取函子

$$G=\mathrm{Hom}_R(-,B),\quad F=\mathrm{Hom}_S(-,C)$$

则由此得其合成为

$$FG=\mathrm{Hom}_S(B,C)\underset{R}{\otimes}-$$

限制 G 作用于 $\mathrm{f.g.}_R\mathfrak{M}$(由 R 为左 Noether 环知在 $\mathscr{A}=\mathrm{f.g.}_R\mathfrak{M}$ 中 A 有投射分解).由于 $C\in\mathrm{Inj}\mathfrak{M}_S$,对任意的 $P\in\mathrm{f.g.P}_R\mathfrak{M}$,

$$\mathrm{Ext}_S^i(\mathrm{Hom}_R(P,B),C)=0,\quad \forall i>0$$

因此 GP 为右 F-零调的,故由上节定理4,有第一象限谱序列

$$\mathrm{Ext}_S^p(\mathrm{Ext}_R^q(A,B),C)\underset{p}{\Rightarrow}\mathrm{Tor}_n^R(\mathrm{Hom}_S(B,C),A)$$

再注意 $C\in\mathrm{Inj}\mathfrak{M}_S$ 保证了这个谱序列对 p 轴衰退,即得

$$E_{0,n}^2=\mathrm{Hom}_S(\mathrm{Ext}_R^n(A,B),C)\simeq\mathrm{Tor}_n^R(\mathrm{Hom}_S(B,C),A)$$

□

由于同态的环(更一般地,同态的代数系)常有相当多的共性,在代数中关于同态的研究有着重要的地位.比如环 R 可看成 $R[x_1,\cdots x_n]$的子环,因此有单同态 $R\rightarrowtail R[x_1,\cdots,x_n]$,且由 $f(x_1,\cdots,x_n)\mapsto f(0,\cdots,0),\forall f(x_1,\cdots,x_n)\in R[x_1,\cdots,x_n]$,给出环同态 $R[x_1,\cdots,x_n]\to R$. R 也可看成 $R^{n\times n}$(R 上的 $n\times n$ 矩阵环)的子环,即有单同态使 $r\mapsto rI_n,\forall r\in R$,其中 I_n 为 n 阶单位矩阵.又如 R 与 R 上关于 G 的群环 RG 之间也有两个常用的同态存在:

$R\to RG$,由 $r\mapsto re$ 给出,其中 $r\in R$,e 为 G 的单位元;

$RG\to R$,由 $\sum r_jg_j\mapsto\sum r_j$ 给出,其中 $r_j\in R,g_j\in G$.

一般地,若 $\varphi:R\to T$ 为一个环同态(本书的环同态都指保持单位元对应且保持加、乘法的对应)我们可将任一个 $M\in{}_T\mathfrak{M}$ 看

成一个左 R-模,这只要定义

$$rm=\varphi(r)m, \quad \forall r\in R, m\in M$$

即可.同理任一个 $M\in\mathfrak{M}_T$ 也有一个右R-模结构.对双模也可类似定义成新的双模.比如 $T\in{}_T\mathfrak{M}_T$,可通过定义

$$t_1tr=t_1t\varphi(r), \quad \forall t_1,t\in T, r\in R$$

使 $T\in{}_T\mathfrak{M}_R$.类似地也可使 $T\in{}_R\mathfrak{M}_T$.容易直接由定义验证下述结果.

命题 1 设 $\varphi:R\to T$ 为环同态,则

(i) 由 φ 可给出一个函子 $U:{}_T\mathfrak{M}\to{}_R\mathfrak{M}(U:\mathfrak{M}_T\to\mathfrak{M}_R)$,称为**换环函子**(change of rings functor);

(ii) $(U,\mathrm{Hom}_R(T,-))$与$(T\underset{R}{\otimes}-,U)$都是伴随对.因此 U 为正合函子.

现设 $A\in{}_R\mathfrak{M}, B\in{}_R\mathfrak{M}$.我们常使用如下记号(规律是:对应$\otimes$,$\varphi$ 写在下,对应 Hom,φ 写在上;φ 写在左表示左,T-模;写在右,表示右 T-模):

$${}_\varphi B=T\underset{R}{\otimes}B\in{}_T\mathfrak{M} \quad (T\underset{R}{\otimes}-\text{中的 } T\in{}_T\mathfrak{M}_R)$$

$$A_\varphi=A\underset{R}{\otimes}T\in\mathfrak{M}_T \quad (-\underset{R}{\otimes}T\text{ 中的 } T\in{}_R\mathfrak{M}_T)$$

$${}^\varphi B=\mathrm{Hom}_R(T,B)\in{}_T\mathfrak{M}(\mathrm{Hom}_R(T,-)\text{中的 } T\in{}_R\mathfrak{M}_T)$$

$$A^\varphi=\mathrm{Hom}_R(T,A)\in\mathfrak{M}_T(\mathrm{Hom}_R(T,-)\text{中的 } T\in{}_T\mathfrak{M}_R)$$

(参看第一章§3 中关于$\otimes$,Hom 给出的模结构).

可以直接验证:φ 在下,保投射性;φ 在上,保内射性.即

引理 1 设 $\varphi:R\to T$ 为环同态,$A\in\mathfrak{M}_R, B\in{}_R\mathfrak{M}$,则

(i) $A\in\mathrm{P}\mathfrak{M}_R$ 时必有 $A_\varphi\in\mathrm{P}\mathfrak{M}_T$,

$B\in\mathrm{P}_R\mathfrak{M}$ 时必有 ${}_\varphi B\in\mathrm{P}_T\mathfrak{M}$;

(ii) $A\in\mathrm{Inj}\mathfrak{M}_R$ 时必有 $A^\varphi\in\mathrm{Inj}\mathfrak{M}_T$,

$B\in\mathrm{Inj}\,{}_R\mathfrak{M}$时必有${}^\varphi B\in\mathrm{Inj}\,{}_T\mathfrak{M}$.

下面我们将由环同态给出一些有用的谱序列,为此我们还需

证

引理 2 设 $\varphi:R\to T$ 为环同态,则有如下的自然同构:

(i) $A\underset{R}{\otimes}L\simeq A_{\varphi}\underset{T}{\otimes}L,\forall A\in\mathfrak{M}_R,L\in{}_T\mathfrak{M}$;

(ii) $M\underset{R}{\otimes}B\simeq M\underset{T}{\otimes}({}_{\varphi}B),\forall M\in\mathfrak{M}_T,B\in{}_R\mathfrak{M}$;

(iii) $\mathrm{Hom}_R(B,L)\simeq\mathrm{Hom}_T({}_{\varphi}B,L),\forall B\in{}_R\mathfrak{M},L\in{}_T\mathfrak{M}$;

(iv) $\mathrm{Hom}_R(L,B)\simeq\mathrm{Hom}_T(L,{}^{\varphi}B),\forall L\in{}_T\mathfrak{M},B\in{}_R\mathfrak{M}$.

证 自然性都可直接验证.

由$\otimes$的结合性知

$$A_{\varphi}\underset{T}{\otimes}L=(A\underset{R}{\otimes}T)\underset{T}{\otimes}L\simeq A\underset{R}{\otimes}(T\underset{T}{\otimes}L)\simeq A\underset{R}{\otimes}L$$

即(i)成立,同理可得(ii).

由伴随同构定理(第二章§3 定理 5)可得(iii)、(iv),即

$$\mathrm{Hom}_T({}_{\varphi}B,L)=\mathrm{Hom}_T(T\underset{R}{\otimes}B,L)\simeq\mathrm{Hom}_R(B,\mathrm{Hom}_T(T,L))$$
$$\simeq\mathrm{Hom}_R(B,L)$$

$$\mathrm{Hom}_T(L,{}^{\varphi}B)=\mathrm{Hom}_T(L,\mathrm{Hom}_R(T,B))\simeq\mathrm{Hom}_R(T\underset{T}{\otimes}L,B)$$
$$\simeq\mathrm{Hom}_R(L,B)$$

□

现在可证

定理 7(谱序列换环定理 I) 设 $\varphi:R\to T$ 为环同态,$A\in\mathfrak{M}_R,L\in{}_T\mathfrak{M}$,则有第一象限谱序列

$$\mathrm{Tor}_p^T(\mathrm{Tor}_q^R(A,T),L)\underset{p}{\Rightarrow}\mathrm{Tor}_n^R(A,L),\forall n=p+q$$

证 取函子

$$G=(\quad)_{\varphi}=-\underset{R}{\otimes}T$$
$$F=-\underset{T}{\otimes}L$$

由引理 2(i)知其合成为

$$FG=-\underset{R}{\otimes}L$$

又显见 F 为右正合的且对任意的$P\in\mathrm{P}\mathfrak{M}_R$,由引理 1(i)知

$$P_{\varphi}\in\mathrm{P}\mathfrak{M}_T$$

于是满足零调条件：

$$\mathrm{Tor}_i^T(P_\varphi, L) = 0, \quad \forall i > 0$$

故由定理 4 即得证.

□

注意到当 $T \in \mathrm{Flat}\ {}_R\mathfrak{M}$时定理 7 中的谱序列是衰退的，立得如下推论(是在此情况下引理 2(i)的推广).

推论 8　在定理 7 的条件下，若又有 $T \in \mathrm{Flat}\ {}_R\mathfrak{M}$，则

$$\mathrm{Tor}_n^T(A_\varphi, L) \simeq \mathrm{Tor}_n^R(A, L), \quad \forall n \geqslant 0$$

完全类似地，可得(其应用可见[Vas,76,p.44,p.47])

定理 8(谱序列换环定理 Ⅱ)　设 $\varphi: R \to T$ 为环同态，则有第一象限谱序列

$$\mathrm{Tor}_p^T(M, \mathrm{Tor}_q^R(T, B)) \underset{p}{\Rightarrow} \mathrm{Tor}_n^R(M, B), \quad \forall M \in \mathfrak{M}_T, B \in {}_R\mathfrak{M}$$

又若 $T \in \mathrm{Flat}\mathfrak{M}_R$，则

$$\mathrm{Tor}_n^T(M, {}_\varphi B) \simeq \mathrm{Tor}_n^R(M, B)$$

证　用引理 1，引理 2 和定理 1.

□

定理 9(谱序列换环定理 Ⅲ)　设 $\varphi: R \to T$ 为环同态，则有第三象限谱序列

$$\mathrm{Ext}_T^p(\mathrm{Tor}_q^R(T, B), L) \underset{p}{\Rightarrow} \mathrm{Ext}_R^n(B, L), \quad \forall B \in {}_R\mathfrak{M}, L \in {}_T\mathfrak{M}.$$

又若 $T \in \mathrm{Flat}\mathfrak{M}_R$，则

$$\mathrm{Ext}_T^n({}_\varphi B, L) \simeq \mathrm{Ext}_R^n(B, L)$$

证　用引理 1，引理 2 和定理 5.

□

定理 9 中的谱序列以及下述定理中的谱序列之应用均可在[Vas,76,p.75]看到.

定理 10(谱序列换环定理 Ⅳ)　设 $\varphi: R \to T$ 为环同态，则有第三象限谱序列

$$\mathrm{Ext}_T^p(L, \mathrm{Ext}_R^q(T, B)) \underset{p}{\Rightarrow} \mathrm{Ext}_R^n(L, B), \quad \forall B \in {}_R\mathfrak{M}, L \in {}_T\mathfrak{M}.$$

又若 $T\in \mathrm{P}_R\mathfrak{M}$,则

$$\mathrm{Ext}_T^n(L,{}^{\varphi}B)\simeq \mathrm{Ext}_R^n(L,B)$$

证 用引理 1,引理 2 和定理 6.

□

作为谱序列换环定理的一个很好的应用,我们来证明如下投射维数的换环定理(参看本章 §2 习题 2.)

命题 2(投射维数的换环定理,I. Kaplansky) 设 $\varphi: R\rightarrow T$ 为环同态,$L\in {}_T\mathfrak{M}$. 则

$$\mathrm{lpd}_R(L)\leqslant \mathrm{lpd}_R(T)+\mathrm{lpd}_T(L)$$

证 只需对 $\mathrm{lpd}_T(L)=l<\infty$ 且 $\mathrm{lpd}_R(T)=t<\infty$ 的情况进行证明.

事实上,由定理 10 知,对任意的 $B\in {}_R\mathfrak{M}$ 有谱序列

$$E_2^{pq}=\mathrm{Ext}_T^p(L,\mathrm{Ext}_R^q(T,B))\Rightarrow \mathrm{Ext}_R^n(L,B)$$

若 $n=p+q>t+l$ 则 $p>l$ 或 $q>t$.

在 $p>l$ 时,由第三章 §3 定理 10 知

$$E_2^{pq}=\mathrm{Ext}_T^p(L,\mathrm{Ext}_R^q(T,B))=0$$

在 $q>t$ 时同理也有 $E_2^{pq}=0$,于是在 $n>l+t$ 时必有

$$E_\infty^{pq}=0,\quad \forall\, p,q,\ p+q=n$$

由此知

$$\mathrm{Ext}_R^n(L,B)=0$$

由 B 的任意性再用第三章 §3 定理 10 即得

$$\mathrm{lpd}_R(L)\leqslant t+l=\mathrm{lpd}_R(T)+\mathrm{lpd}_T(L)$$

□

用定理 8(谱序列换环定理 Ⅱ)我们又可证明平坦维数的换环定理:

命题 3(平坦维数的换环定理) 设 $\varphi: R\rightarrow T$ 为环同态,$L\in \mathfrak{M}_T$,则

$$\mathrm{rfd}_R(L)\leqslant \mathrm{rfd}_R(T)+\mathrm{rfd}_T(L)$$

证 设 $\mathrm{rfd}_T(L)=l<\infty$，且 $\mathrm{rfd}_R(T)=t<\infty$（其他情况是显见的）. 由定理 8 有谱序列

$$E_{pq}^2=\mathrm{Tor}_p^T(L,\mathrm{Tor}_q^R(T,B))\Rightarrow\mathrm{Tor}_n^R(L,B),\ \forall B\in{}_R\mathfrak{M}$$

若 $n=p+q>t+l$，则 $p>l$ 或 $q>t$. 在这两种情况下都有

$$E_{pq}^2=0$$

因此

$$E_{pq}^\infty=0$$

故对 $n=p+q$，总有

$$\mathrm{Tor}_n^R(L,B)=0$$

由 B 的任意性，从第三章 §4 定理 8 即知

$$\mathrm{rfd}_R(L)\leqslant t+l=\mathrm{rfd}_R(T)+\mathrm{rfd}_T(L)$$

□

类似地，用定理 9（谱序列换环定理 Ⅲ）我们可证内射维数的换环定理：

命题 4 （内射维数的换环定理）设 $\varphi:R\to T$ 为环同态，$L\in{}_T\mathfrak{M}$，则

$$\mathrm{lid}_R(L)\leqslant\mathrm{lid}_R(T)+\mathrm{rfd}_T(L)$$

化为谱序列换环定理的另一个重要应用，我们来证明多项式环整体维数的合冲定理，即一个环 R（未必可换）与 R 上 m 元多项式环 $R[x_1,x_2,\cdots,x_m]$ 的整体维数关系的定理. 显然，由数学归纳法原理可以预想到，关键是处理 $m=1$ 的情况. 注意 $R[x]$ 中 x 是其中心元，即 $f(x)x=xf(x)$，$\forall f(x)\in R[x]$，记成 $x\in C(R[x])$，且 x 非可逆也非零因子，且有环同构 $R\simeq R[x]/xR[x]$（事实上，由环同态 $R[x]\xrightarrow[\varphi]{}R$，$\varphi(f(x))=f(0)$ 即可看出）.

因此我们先来证明 D. Ress 的一个重要结果.

命题 5（D. Ress，1956 年） 设 R 为环，$x\in C(R)$，在 R 中 x 非可逆，也非零因子，$T=R/xR$，$B\in{}_R\mathfrak{M}$，且乘法映射

$$B\xrightarrow{x}B$$

$$b \longmapsto xb$$

为单射，则对任意的 $n \geqslant 0$ 与 $L \in {}_T\mathfrak{M}$ 有

$$\mathrm{Ext}_T^n(L, B/xB) \simeq \mathrm{Ext}_R^{n+1}(L, B)$$

因此，若 $\mathrm{lD}(T) = n < \infty$，则 $\mathrm{lD}(R) \geqslant n+1$. 特别地，对 R 上的可换不定元 $x_1, \cdots, x_m$（即 $\forall r \in R, rx_j = x_j r, x_i x_j = x_j x_i$），

$$\mathrm{lD}(R[x_1, x_2, \cdots, x_m]) \geqslant \mathrm{lD}(R) + m$$

证 由设注意 x 非零因子，知有 ${}_R\mathfrak{M}$中的正合列

$$0 \to R \xrightarrow{x} R \to T \to 0$$

其中 x 为乘法映射，即 $\forall r \in R, r \longmapsto xr$. 用反变函子 $\mathrm{Hom}_R(-, B)$作用于这个正合列得长正合列（见第三章§2）

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(T, B) \to \mathrm{Hom}_R(R, B) \xrightarrow{x} \mathrm{Hom}_R(R, B) \to$$
$$\mathrm{Ext}_R^1(T, B) \to \mathrm{Ext}_R^1(R, B) \to \cdots \to \mathrm{Ext}_R^q(R, B)$$
$$\to \mathrm{Ext}_R^{q+1}(T, B) \to \mathrm{Ext}_R^{q+1}(R, B) \to \cdots, \quad \forall q \geqslant 1$$

由 R－模同构

$$\mathrm{Hom}_R(R, B) \simeq B$$

从上述长正合列可看出

$$\mathrm{Hom}_R(T, B) = 0$$

又由 $R \in \mathrm{P}_R\mathfrak{M}$ 知

$$\mathrm{Ext}_R^1(R, B) = 0, \ \mathrm{Ext}_R^q(R, B) = 0, \quad \forall q \geqslant 1$$

因此有

$$\mathrm{Ext}_R^1(T, B) \simeq B/xB$$

$$\mathrm{Ext}_R^q(T, B) = 0, \quad \forall q \geqslant 2$$

另一方面，由设知有自然的环同态 $\varphi: R \to T = R/xR$，于是由定理 10 知有第三象限谱序列

$$E_2^{pq} = \mathrm{Ext}_T^p(L, \mathrm{Ext}_R^q(T, B)) \underset{p}{\Rightarrow} \mathrm{Ext}_R^n(L, B)$$

注意

$$\mathrm{Ext}_R^0(T, B) \simeq \mathrm{Hom}_R(T, B)$$

由上段证明知，$E_2^{pq}=0$，$\forall q\neq 1$，即此谱序列关于 $q=1$ 是衰退的，于是有

$$\mathrm{Ext}_T^{n-1}(L,\mathrm{Ext}_R^1(T,B))\simeq\mathrm{Ext}_R^n(L,B)$$

换 n 为 $n+1$ 即得

$$\mathrm{Ext}_T^n(L,B/xB)\simeq\mathrm{Ext}_R^{n+1}(L,B)$$

因此，$\mathrm{lD}(T)=n<\infty$ 时必有 $L\in{}_T\mathfrak{M}$ 使上式之左非零. 于是上式右也非零. 故 $\mathrm{lD}(R)\geqslant n+1$.

最后换上述的 R 为 $R[x_1]$，换 T 为 R，即得

$$\mathrm{lD}(R[x_1])\geqslant\mathrm{lD}(R)+1$$

用归纳法即得

$$\mathrm{lD}(R[x_1,x_2,\cdots,x_m])\geqslant\mathrm{lD}(R)+m$$

□

下面讨论命题 5 中的最后一个不等式的反向不等号是否成立. 这自然地(由归纳法原理)可归为讨论

$$\mathrm{lD}(R[x])\leqslant\mathrm{lD}(R)+1$$

是否成立. 为此，我们引进一个记号

设 $M\in{}_R\mathfrak{M}$，记

$$M[x]\equiv R[x]\bigotimes_R M=\{\sum_{<\infty}(x^i\otimes m_i)\mid i\geqslant 0,m_i\in M\}$$

这是一个左 $R[x]$－模. 容易看出 $R[x]$是 R 上以$\{1,x,x^2,\cdots\}$为基的自由左 R－模，因此投射 $R[x]$－模必为投射 R－模. 如果令

$$t^i\otimes m_i\longmapsto m_it^i$$

则可看出这是一个一一对应，因此 $M[x]$中的元素都可看作是以 M 元素作系数的 x 的多项式. 下面来证明两条引理.

引理 3　$\mathrm{lpd}_R(M)=\mathrm{lpd}_{R[x]}(M[x])$，$\forall M\in{}_R\mathfrak{M}$，因此 $M\in\mathrm{P}_R\mathfrak{M}$ 当且仅当 $M[x]\in\mathrm{P}_{R[x]}\mathfrak{M}$.

证　设 $\mathrm{lpd}_R(M)\leqslant n$，则有 M 的左R－模投射分解

$$0\to P_n\to\cdots\to P_0\to M\to 0$$

注意 $R[x]\in \mathrm{Free}_R\mathfrak{M}\subset \mathrm{Flat}_R\mathfrak{M}$. 于是以正合函子 $R[x]\underset{R}{\otimes}-$ 作用之,得 $R[x]$-模正合列

$$0\to R[x]\underset{R}{\otimes}P_n\to\cdots\to R[x]\underset{R}{\otimes}P_0\to M[x]\to 0$$

显然作为投射模的张量积,$R[x]\underset{R}{\otimes}P_j$ 都是投射左 $R[x]$-模. 因此

$$\mathrm{lpd}_{R[x]}(M[x])\leqslant n$$

再设

$$\mathrm{lpd}_{R[x]}(M[x])\leqslant n$$

则有 $M[x]$的左 $R[x]$-模投射分解

$$0\to Q_n\to\cdots\to Q_0\to M[x]\to 0$$

注意上面说明的投射左 $R[x]$-模必为投射左 R-模,则知 $Q_j\in \mathrm{P}_R\mathfrak{M}$. 另一方面,作为左 R-模,显然

$$M[x]=R[x]\underset{R}{\otimes}M\simeq\coprod_{\aleph_0}M$$

又由(见第三章 §3 定理 4)

$$\mathrm{Ext}_R^j\left(\coprod A_i,X\right)\simeq\prod\mathrm{Ext}_R^j(A_i,X),\quad \forall A_i,X\in{}_R\mathfrak{M}$$

知(即第三章 §3 习题 4)

$$\mathrm{lpd}_R\left(\coprod A_i\right)=\max\ \mathrm{lpd}_R(A_i)$$

故

$$\mathrm{lpd}_R(M)\leqslant n$$

由上两段证明即得欲证.

□

引理 4 设 $M\in{}_{R[x]}\mathfrak{M}$,则有 ${}_{R[x]}\mathfrak{M}$ 中的正合列

$$0\to M[x]\to M[x]\to M\to 0$$

证 由

$$\sum x^i\otimes m_i\mapsto\sum x^i m_i$$

定义左 $R[x]$-模同态 $f:M[x]\to M$. 令

$$\mathrm{Ker}f=K$$

则有左 $R[x]$-模正合列

$$0\to K\to M[x]\xrightarrow{f}M\to 0$$

下面只需证:有左 $R[x]$-模同构 $g:M[x]\to K$.

为此,先由

$$\sum x^i\otimes m_i\mapsto\sum(x^i\otimes xm_i-x^{i+1}\otimes m_i)$$

(注意 $f(\sum(x^i\otimes xm_i-x^{i+1}\otimes m_i))=0$)定义左 $R[x]$-模同态 $g:M(x)\to K$.从

$$g(\sum_{i=0}^{n}x^i\otimes m_i)=1\otimes xm_0+\sum_{i=1}^{n}x^i\otimes(xm_i-m_{i-1})-x^{n+1}\otimes m_n$$
$$=0$$

可推出

$$0=-m_n=xm_n-m_{n-1}=\cdots=xm_1-m_0=xm_0$$

于是此时必有

$$m_i=0,i=0,1,\cdots,n$$

这就说明了 g 为单同态.现在只需证明 g 也是满同态即可.

事实上,任取

$$X=\sum_{i=0}^{n}x^i\otimes m'_i\in K,\quad m'_i\in M$$

由 $K=\mathrm{Ker}f$ 知

$$\sum_{i=0}^{n}x^im'_i=0$$

依次取 $m_{n-1}=-m'_n,m_{n-2}=xm_{n-1}-m'_{n-1},\cdots$
$M_0=xm_1-m'_1$,即知 $X\in\mathrm{Im}g$.即 g 为满同态.

□

由引理 3、引理 4 即得

命题 6 (Hilbert 合冲(syzygy)定理) 设 R 为任意环,则

$$\mathrm{lD}(R[x_1,\cdots,x_m])=\mathrm{lD}(R)+m$$

证 由命题 5 与归纳法知,只需证

$$\mathrm{lD}(R[x])\leqslant\mathrm{lD}(R)+1$$

而且我们只需对 $\mathrm{lD}(R)=n<\infty$ 的情况加以证明.

事实上,任取 $M\in{}_{R[x]}\mathfrak{M}$,则 $M\in{}_{R}\mathfrak{M}$. 于是由引理 3 知

$$\mathrm{lpd}_{R[x]}(M[x])=\mathrm{lpd}_R(M)\leqslant n.$$

再从引理 4,有左 $R[x]$-模正合列

$$0\to M[x]\to M[x]\to M\to 0$$

对此用关于 Ext 的长正合列定理(见第三章 §2),得左 $R[x]$-模正合列

$$\cdots\to \mathrm{Ext}_{R[x]}^{k+j}(M[x],A)\to \mathrm{Ext}_{R[x]}^{k+j+1}(M,A)\to \mathrm{Ext}_{R[x]}^{k+j+1}(M[x],A)\to\cdots,\quad \forall A\in{}_{R[x]}\mathfrak{M},j\geqslant 1$$

令 $\mathrm{lpd}_{R[x]}(M[x])=k$,则 $k\leqslant n$ 且上正合列写出的三项中,第一项、第三项均为 0,因此

$$\mathrm{Ext}_{R(x)}^{k+1+j}(M,A)=0,\quad \forall A\in{}_{R[x]}\mathfrak{M},j\geqslant 1$$

故

$$\mathrm{lpd}_{R[x]}(M)\leqslant 1+k\leqslant 1+n=\mathrm{lD}(R)+1,\quad \forall M\in{}_{R[x]}\mathfrak{M}$$

由此即得

$$\mathrm{lD}(R[x])\leqslant \mathrm{lD}(R)+1$$

□

合冲定理将多项式环 $R[x_1,\cdots,x_m]$ 整体维数的计算化归对更简单的环 R 的整体维数的计算. 此外,这条定理说明了:任给非负整数 n,都存在整体维数为 n 的环. 比如 R 为 Artin 半单环时(比如 R 为域) $\mathrm{lD}(R)=0$,且 $\mathrm{lD}(R[x_1,\cdots,x_n])=n$.

习 题 4.4

1. 用谱序列的方法补出命题 4 的证明.
2. 设 H 为群 G 的一个子群、B 为一个 G-模,证明(参看上节)

$$H^n(H,B)\simeq H^n(G,\mathrm{Hom}_H(\mathbb{Z}G,B))$$

参 考 文 献

(国内作者以笔划为序,国外作者按字典序)

[刘,83]刘绍学.环与代数.北京:科学出版社,1983

[陈,89]陈家鼐.环与模.北京:北京师范学院出版社,1989

[佟,88]佟文廷.几种同调维数与半遗传环.南京大学学报数学半年刊.no.1,1988,11—19,MR89j:13011,Zb1,695:13013

[佟,92]佟文廷.群环的几种同调维数.数学年刊,13A(1992)39—46,CMP,3:16(1993),MR94a:16013

[佟,94]佟文廷.IBN rings and orderings on Grothendieck groups, Acta Math. Sinica, New Ser; 10(1994),225—230

[周,79]周伯壎.左环模的张量积与范畴.南京大学学报(自然科学版),no.1,(1979),1—20,MR 82j:16045

[周,81]周伯壎.左模的张量积及其同调维数.数学研究与评论,创刊号,1(1981),17—24,MR 82c:16017

[周,82]周伯壎.左模的张量积与三复形.南京大学学报(自然科学版),no.2,(1982),239—253,MR 85k:16044

[周,88]周伯壎.同调代数.北京:科学出版社,1988

[周佟,95]周伯壎,佟文廷.Some results on homological algebra and module theory, in 〈Rings, Groups and Algebras〉, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 181,301—315,Marcel Dekker Inc., New York,1996

[聂丁,88]聂灵沼、丁石孙.代数学引论.北京:高等教育出版社,1988

[谢,82]谢邦杰.抽象代数学.上海:上海科学技术出版社,1982

[熊,93]熊全淹.环论.武汉:武汉大学出版社,1993

[AF,74]Anderson F W, Fuller K R. Rings and Categories of Modules. New York: Springer-Verlag, 1974

[BW,87]Beachy J A, Weakley W D. A note on prime ideals which test injectivi-

ty. Comm. in Alg. 15(3)(1987), 471—478

[B,82]Brown K S. Cohomology of Groups. New York: Springer - Verlag, 1982

[CD,93]Camps R, Dicks W. On semilocal rings, Israel J. Math., 81(1993), 203——211

[CE,56]Cartan H, Eilenberg S. Homological Algebra. Princeton:1956

[C,60]Chase S U. Direct products of modules, Trans. Amer. Math. Soc., 97 (1960),457—473

[Co,79]Cohn P M. Algebra, vol.2 Chichester: John Wiley & Sons, 1979

[EM,45]Eilenberg S, MacLane S. General theory of natural equivalences. Trans. Amer. Math. Soc., 58(1945),231—294, MR. 7,109

[E,73]Evans E G. Krull - Schmidt and cancellation over local rings. Pac. J. Math., 46(1973), 115—121

[F, II ,76]Faith C. Algebra, II ,Ring Theory. Berlin: Springer - Verlag, 1976

[G.78]Greub W H. Multilinear Algebra. 2nd ed. New York: Springer - Verlag, 1978

[Gr,74]Griffith P. On the problem of intrinsically characterizing the functor Ext. Symp. Math. X III, 207—232, New York: Acad. Press, 1974

[He,85]He Zheng - xu. Characterizations of Noetherian and hereditary rings. Proc. Amer. Math. Soc., 93(1985),414—416

[HS,70]Hilton P J, Stammbach U A. A Course in Homological Algebra. New York: Springer - Verlag, 1970

[Ho,84]Ho Kuen Ng. Finitely presented dimension of commutative rings and modules. Pacific J. Math., 113(1984), 417—431

[Jac,80]Jacobson N. Basic Algebra, II. San Francisco: W. H. Freeman and Company, 1980

[Jat,69]Jategaonkar A V. A counter - example in ring theory and homological algebra. J. Alg., 12(1969), 418—440

[Kan,58]Kan D M. Adjoint functors. Trans. Amer. Math. Soc., 87(1958), 294—329

[Ko,47]Koszul J L. Sur les opérateurs de dérivation dans un anneau. C. R. Acad. Sci. Paris, 225(1947), 217—219

[L,84]Lang S. Algebra. 2nd ed. Menlo Park, California: Addison－Wesley Publishing Company, Inc., Advanced Book Program, 1984

[Le,46]Leray J. Structure de l'anneau d'homologie dúne représentation. Paris: C. R. Acad. Sci., 222(1946),1419—1422

[Mac ,63]MacLane S. Homology. Berlin: Springer－Verlag, 1st ed. 1963.4th print., 1994,1995

[Mat ,58]Matlis E. Injective modules over Noetherian rings. Pacific J. Math., 8(1958),511—528

[Mc,84]McDonald B R. Linear Algebra over Commutative Rings. New York and Basel: Marcel Dekker, Inc., 1984

[Me,88]Menal P. Cancellation modules over regular rings, Lecture Notes in Math., 1328, Ring Theory, 1988, 187—208

[N,73]Northcott D G, F.R.S. A First Course of Homological Algebra, Cambridge University Press, 1973

[Os,73]Osofsky B L. Homological Dimensions of Modules. CBMS Regional Conf. Ser. Math., 12, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1973

[PP,79]Popescu N, Popescu L. Theory of Categories, Bucuresti: Editura Academiei Republicii Socialiste România, 1979

[R,79]Rotman J J. An Introduction to Homological Algebra. New York: Acad. Press, 1979

[Sm,66]Small L. Hereditary rings. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 55 (1966),25—27

[V,83]Vámos P. Ideals and modules testing injectivity. Comm. in Alg., 11 (22)(1983), 2495—2505

[Vas,76]Vasconcelos W V. The Rings of Dimension Two. New York and Basel: Marcel Dekker, Inc., 1976

[W,80]Warfield R B, Cancellation of modules and groups and stable range of endomorphism rings. Pacific J. Math., 91(1980), 457—485

索　　引

为便于读者查索，本索引以黑体字列出八大词类名：**环，函子，范畴，复形，维数，谱序列，模，著名的定理、引理与命题**. 比如各种环按笔画及外文字母开头者依字典序列的原则均列于名词“**环**”之下，各类函子亦以笔画顺序列于名词“**函子**”之下. 不宜归入这八大类者按笔画列于“其他”之下. 各名词后标出可详细参看的出处（未必是第一次出现的地方）：章（Ch）、节（§）及出现的定义或定理序号. 对不在定义或定理中出现的名词，亦用“注 1”或“定理 2 之后”等指明可查阅的地方.

其他

著名的定理、引理与命题

常用记号说明

关于范畴

$\mathrm{Ob}\mathscr{C}$:范畴 $\mathscr{C}$ 的对象类

$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)(\mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(A,B))$:范畴 $\mathscr{C}$ 中对象 A 到对象 B 的态射集

I_A:A 上的恒等映射、恒等态射或恒等同态

$\mathbb{AG}$:Abel 群范畴

$\mathscr{C}^{\circ}$:范畴 $\mathscr{C}^{\circ}$ 的反范畴(对偶范畴)

$\mathbb{C}\mathrm{omp}$:复形范畴

$\mathbb{G}$:群范畴

$\mathbb{LS}_K$:域 K 上线性空间范畴

$\mathfrak{M}_R$(Mod_R 或 $\mathrm{Mod}-R$):右 R-模范畴

${}_R\mathfrak{M}$(${}_R\mathrm{Mod}$ 或 $R-\mathrm{Mod}$):左 R-模范畴

${}_R\mathfrak{M}_S$:$R-S$ 双模范畴

$\mathbb{R}\mathrm{ing}$:环范畴

$\mathbb{S}$:集(合)范畴

$\mathbb{TG}$:拓扑群范畴

$\mathbb{T}\mathrm{op}$:拓扑空间范畴

$\approx$:等价(范畴间的)

$\simeq$:同构(模的,范畴间的,…)

关于函子

$*$:即 $\mathrm{Hom}_R(—,R)$

$\circledast$:即 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(—,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$

$\oplus(\amalg)$:直和

Π:直积

$\underset{\text{nat}}{\simeq}$:自然等价(函子的)

(F,G):函子 F,G 为伴随(函子)对

Hom:Hom$(A,-)$或 Hom$(-,B)$,Hom 函子

Ext:Hom 的右导出函子

$\otimes$:$A\otimes-$或$-\otimes B$,张量积函子

Tor:$\otimes$的左导出函子

L_nF:函子 F 的第 n 个左导出函子

R^nF:函子 F 的第 n 个右导出函子

关于模

f.g.:有限生成的

f.p.(f.r.):有限表示(有限相关)的

$\text{Free}_R\mathfrak{M}(\text{Free}\,\mathfrak{M}_R)$:自由左(右)$R$-模类

$\text{P}_R\mathfrak{M}(\text{P}\mathfrak{M}_R)$:投射左(右)$R$-模数

$\text{Flat}_R\mathfrak{M}(\text{Flat}\,\mathfrak{M}_R)$:平坦左(右)$R$-模类

$\text{Inj}_R\mathfrak{M}(\text{Inj}\mathfrak{M}_R)$:内射左(右)$R$-模类

$M\underset{R}{\otimes}N$:右 R-模 M 与左 R-模 N 的张量积

$\text{Hom}_R(M,M')$:R-模 M 到 R-模 M'的同态集(群)

$\text{BL}(M,N;T)$:交换环上 A,B 两个模到模 T 的双线性映射全体

$\text{Biab}(A,B;G)$:右 R-模 A,左 R-模 B 到 Abel 群 G 的双加 R-平衡映射全体

$\text{Div}_R\mathfrak{M}(\text{Div}\,\mathfrak{M}_R)$:可除左(右)$R$-模类

${}_R\mathfrak{M}(\mathfrak{M}_R)$:左(右)$R$-模全体

${}_\varphi B$:环同态 $\varphi:R\to T$ 下 $T\underset{R}{\otimes}B\in{}_T\mathfrak{M}$ 的简写 $B\in{}_R\mathfrak{M}$

A_φ:环同态 $\varphi:R\to T$ 下 $A\underset{R}{\otimes}T\in\mathfrak{M}_T$ 的简写$(A\in\mathfrak{M}_R)$

${}^\varphi B$:环同态 $\varphi:R\to T$ 下 $\text{Hom}_R(T,B)\in{}_T\mathfrak{M}$ 的简写$(B\in{}_R\mathfrak{M})$

A^φ:环同态 $\varphi:R\to T$ 下 $\text{Hom}_R(T,A)\in{}_T\mathfrak{M}$ 的简写$(A\in\mathfrak{M}_R)$

rank$M$:整环上模 M 的秩

$T(A)$:A 的挠子模

关于维数

cd(G):群 G 的上同调维数

hd(G):群 G 的同调维数

lfd(M)(rfd(M)):模 M 的左(右)平坦维数

WD(R):环 R 的弱维数

lgD(R)(lpD(R),lD(R)):环 R 的左整体维数

rgD(R)(rpD(R),rD(R)):环 R 的右整体维数

lpd(M)(rpd(M)):模 M 的左(右)投射维数

lid(M)(rid(M)):模 M 的左(右)内射维数

关于复形

$B_n(\mathbb{A})$:复形$\mathbb{A}$的 n-边缘

$Z_n(\mathbb{A})$:复形$\mathbb{A}$的 n-圈(循环)

$H_n(\mathbb{A})$:复形$\mathbb{A}$的第 n 个同调模(群)

$B^n(\mathbb{A})$:上复形$\mathbb{A}$的 n-上边缘

$Z^n(\mathbb{A})$:上复形$\mathbb{A}$的 n-上圈(上循环)

$H^n(\mathbb{A})$:上复形$\mathbb{A}$的第 n 个上同调模(群)

$\overline{f}$:模同态 f 上的链映射(对复形)

$\underline{f}$:模同态 f 下的链映射(对上复形)

g_*:Hom(A,—)(g)(对模同态或态射),或 $H_n(g)$(对链映射)

g^*:Hom(—,B)(g)(对模同态或态射),或 $H^n(g)$(对链映射)

$f \sim f_1$:链映射 f 同伦于链映射 f_1

$\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}$:复形$\mathbb{A}$,$\mathbb{B}$各分量张量积所成双复形的全复形

$\mathbb{H}$om($\mathbb{A}$,$\mathbb{B}$):复形$\mathbb{A}$,$\mathbb{B}$各分量的 Hom 所成双复形的全复形

Tot(M):双复形 M 的全复形

其他记号

G^{ab}:群 G 的 Abel 化,即 $G/[G,G]$,其中$[G,G]$为 G 的换位子群

R°:R 的反环

$\rightarrowtail$:单同态

$\twoheadrightarrow$:满同态

$\Rightarrow$:可推出,蕴含

$\underset{p}{\Rightarrow}$:谱序列收敛记号

$\exists|$:存在唯一

$\forall$:任意的,所有的

Ker:核

Coker:上核

Im:象

[ ]:同调类或等价扩张类

$\mathbb{P}_A$:模 A 的投射分解

$\mathbb{P}_{\hat{A}}$:模 A 的删项投射分解(复形)

$\mathbb{E}_A$:模 A 的内射分解

$\mathbb{E}_{\hat{A}}$:模 A 的删项内射分解(上复形)

$\mathbb{F}_A$:模 A 的平坦分解

$\mathbb{F}_{\hat{A}}$:模 A 的删项平坦分解

责任编辑　邵　勇
封面设计　王　雎
责任绘图　陈淑芳
版式设计　马静如
责任校对　王　超
责任印制　宋克学

(京)112 号

图书在版编目(CIP)数据

同调代数引论/佟文廷. -北京:高等教育出版社,1998.5

ISBN 7-04-006239-9

Ⅰ.同… Ⅱ.佟… Ⅲ.同调代数 Ⅳ.O154

中国版本图书馆 CIP 数据核字(97)第 09011 号

*

高等教育出版社出版

北京沙滩后街 55 号

邮政编码:100009 传真:64014048 电话:64054588

新华书店总店北京发行所发行

高等教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 10.625 字数 270 000

1998 年 5 月第 1 版 1998 年 5 月第 1 次印刷

印数 0 001-3 169

定价 10.60 元